№ 3, 2001 г. / Физический факультатив

А. Стасенко

Зачем Галилею песочница

Зачем Галилею песочница

А.СТАСЕНКО

Жара. Пляж. Дети строят из сырого песка башни и зáмки. Мальчик меланхолично роняет стальной шарик в горку горячего песка. Спрашивает: «А на какую глубину уйдет шарик, если его уронить с высоты сто метров?». И действительно, стóит подумать, как шарик движется в песке.

Первая стадия падения очевидна: песок при ударе взметается вверх и в стороны – образуется кратер. А что там, внутри песка, на глубинах, много больших размера шарика?

В какой-то мере песок похож на жидкость. О нем можно сказать, что он струится, течет – ведь есть же, например, песочные часы (в принципе такие же, как и водяные). Но есть и важное отличие: из жидкости не сделаешь горку, а из сухого песка можно насыпать конус (рис.1). (Насыпали,

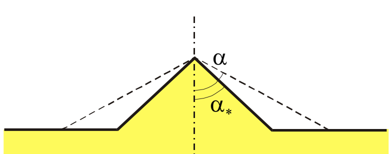

Рис. 1

прикинули на глазок угол при вершине: что-то около $2\alpha_* = 120°$.) Поэтому ясно, что стальной шарик в океане будет монотонно тонуть, а в песке он заведомо остановится на конечной глубине – и этот факт как-то должен быть связан с величиной предельного угла α_*.

На каждую песчинку массой Δm, лежащую «на поверхности» конуса, действует скатывающая составляющая силы тяжести, равная $\Delta mg\cos\alpha$, причем так, что при $\alpha > \alpha_*$ песчинка «не хочет» скатываться, а при $\alpha < \alpha_*$ конус сам собой осыпается, пока не будет достигнуто условие $\alpha = \alpha_*$. Несомненно, это связано с силами взаимодействия между песчинками. Поэтому, если уж песок и считать жидкостью, то это так называемая *неньютоновская* жидкость. Чем она интересна?

Если обычная вязкая (ньютоновская) жидкость при течении в трубе имеет радиальное распределение скоростей, качественно изображенное на рисунке 2,*а*, то для неньютоновской жидкости этот профиль скоростей похож на рисунок 2,*б*, где у стенок трубы имеется неподвижный слой сыпучей среды (см. штриховые линии). И этот слой тем толще, чем больше сила взаимодействия (адгезия) частиц друг с другом и с твердой стенкой. Вот почему так трудно высыпать, например, цемент через трубу – приходится ее трясти, колотить молотком или гаечным ключом. Еще один пример – каждый знает, чтó нужно делать с солонкой или перечницей, если соответствующий материал не желает высыпаться (все это красиво называется *вибрационной реологией*).

Итак, *с одной стороны*, посмотрим на песок как на обычную жидкость. Тогда, если этой «жидкости» приписать среднюю плотность $\rho_п$ (это *не* плотность материала песка, потому что между песчинками существуют воздушные промежутки), то шарик радиусом r при движении со скоростью v (рис.3) будет испытывать силу сопротивления величиной

$$F_{сопр} \sim \rho_п v^2 \pi r^2 .$$

При перемещении на малое расстояние dy эта сила произведет работу, равную $F_{сопр}dy$, и, следовательно, изменит кинетическую энергию на величину

$$md\frac{v^2}{2} \sim -\pi r^2 \rho_п v^2 dy \qquad (1)$$

(ось y и скорость считаем положительными в направлении вниз, силу тяжести шарика mg полагаем много меньшей силы сопротивления). На рисунке 3,*а* искривленными стрелками условно показаны «линии тока» песчинок в неподвижной системе координат, связанной с землей, а на рисунке 3,*б* – в системе координат самого шарика, на который песок набегает с той же (по величине) скоростью v (на «бесконечности»). Отметим, что вид линий тока совершенно различен в этих двух системах координат.

Согласно гидродинамике идеальной несжимаемой жидкости, если эта жидкость натекает на шарик со скоростью v, ее скорость на экваторе будет наибольшей и равной $3v/2$ (из-за сжатий линий тока в экваториальной плоскости). Значит, скорость песка на экваторе шарика в неподвижной системе координат будет равна по величине $v/2$.

Написанное выше дифференциальное соотношение (1) имеет так называемый *релаксационный вид*. Оно типично для многих процессов, в кото-

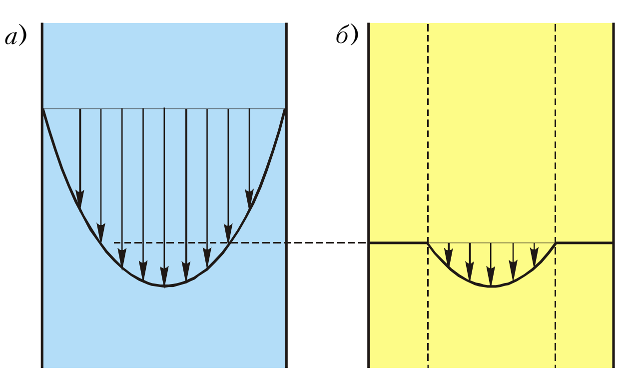

Рис. 2

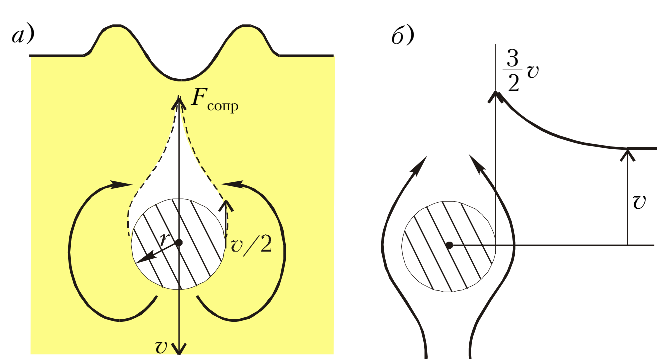

Рис. 3

рых изменение исследуемой величины пропорционально ее текущему значению, например для распада радиоактивных атомов, размножения микробов или роста народонаселения Земли по Мальтусу. Его решение имеет вид

$$\ln\frac{v_0}{v} \sim \frac{\pi r^2 \rho_\text{п}}{m}(y-0) = \frac{y}{l}, \quad (2)$$

где v_0 – начальное значение скорости шарика (при $y = 0$), $l = \dfrac{m}{\pi r^2 \rho_\text{п}}$ – характерная длина. Так, для стального шарика радиусом $r = 1$ см и массой $m = 4\pi\rho_\text{ст} r^3/3 \approx 30$ г (где $\rho_\text{ст} = 7{,}8$ г/см^3 – плотность стали) эта длина имеет порядок

$$l \approx \frac{3\cdot 10^{-2}\ \text{кг}}{\pi\cdot 10^{-4}\ \text{м}^2 \cdot 1{,}6\cdot 10^3\ \text{кг/м}^3} \approx 6{,}5\ \text{см}$$

(среднеобъемная плотность песков лежит в диапазоне 1,5 – 1,7 г/см^3; мы приняли $\rho_\text{п} = 1{,}6$ г/см^3). Это уже определенный намек на глубину проникновения: на этом характерном расстоянии скорость убывает в $e = 2{,}7$ раза. Но при этом, согласно полученной формуле, шарик нигде не остановится – просто он будет двигаться по мере углубления все медленнее и медленнее. (Конечно, это лишь оценка l по порядку величины: ведь в выражение для силы сопротивления нужно было бы внести еще безразмерный множитель, который называется коэффициентом сопротивления шарика при его движении в песке. Но кто его знает?)

Однако вспомним, что, *с другой стороны*, песок не совсем жидкость, и этот факт как-то связан с наличием предельного угла α_*. Можно ожидать, что по достижении некоторого значения скорости v_* шарик резко затормозится: в этот момент силы сцепления между песчинками начнут играть преобладающую роль по сравнению … С чем? Возможно, ответ заключается в сравнении характерной величины касательной составляющей ускорения a_τ песчинок на экваторе шарика с величиной ускорения, «скатывающего» песчинки с поверхности песчаной горки. Сделаем оценки. Скорость песка на экваторе возрастает на $\Delta v_\tau = \dfrac{v}{2}$ по сравнению с ее значением в «невозмущенном потоке». Тогда «среднее» приращение скорости будет порядка $\langle \Delta v_\tau \rangle = \dfrac{1}{2}\dfrac{v}{2}$. И происходит это на «характерном перемещении» порядка радиуса шарика r за характерное время $\langle \Delta t \rangle \sim r \Big/ \left(\dfrac{1}{2}\left(v + \dfrac{3v}{2}\right)\right)$.

Следовательно, $a_\tau = \dfrac{\langle \Delta v_\tau \rangle}{\langle \Delta t \rangle} \sim \dfrac{5}{16}\dfrac{v^2}{r}$. Приравняем это ускорение к предельному значению скатывающего ускорения $g\cos\alpha_*$. Отсюда найдем

$$v^2 \sim \pi r g \cos\alpha_* .$$

Теперь, подставляя эту конечную скорость в выражение (2), для глубины проникновения получим выражение

$$y_* \sim \frac{m}{2\pi r^2 \rho_\text{п}} \ln\frac{v_0^2}{\pi r g\cos\alpha_*} \approx$$

$$\approx \frac{2}{3}\frac{\rho_\text{ст}}{\rho_\text{п}} r \ln\frac{2h}{\pi r\cos\alpha_*}. \quad (3)$$

Видно, что y_* растет с увеличением предельного угла α_*. Это понятно: ведь чем больше α_*, тем более среда «сыпучая», а в пределе $\alpha_* \to \pi/2$ она переходит в жидкость, и тогда стальной шарик может сколько угодно тонуть, например в воде. Но не в ртути – ибо в этом случае нужно учесть и силу Архимеда, которую мы пока что не принимали во внимание (аналогичная ситуация возникнет, если в воду бросить деревянный шарик). Как уже было сказано, если песок потрясти, то его конус будет расплываться, песок все более будет похож на жидкость. В результате в «потрясенном» песке глубина проникновения упавшего шарика должна быть больше. А деревянный шарик или шарик для пинг-понга в сотрясаемом песке будут «всплывать» – это можно проверить в порядке лабораторной работы.

Далее, в выражении (3) мы приняли, что скорость падения шарика с высоты h равна $v_0 = \sqrt{2gh}$, т.е. пренебрегли сопротивлением воздуха – это для того, чтобы поскорее ответить на вопрос, поставленный в самом начале. Конечно, этот результат можно уточнить, учитывая силу сопротивления воздуха. Очевидно, что при этом $v_0^2 < 2gh$. Но полученная формула (3) содержит логарифмическую зависимость от начальной скорости; это настолько слабая зависимость, что физики в шутку называют эту функцию константой. Поэтому такое уточнение несущественно.

Интересно отметить также, что выражение (3) не содержит зависимости от ускорения тяготения. Значит, на Луне глубина проникновения будет та же, что и на Земле: был бы песок одинаков.

Итак, полагая в выражении (3) $h = 100$ м, $\cos\alpha_* = \cos 60^\circ = 1/2$, $r = 10^{-2}$ м, получим $y_* \sim 0{,}3$ м. Учитывая множество принятых предположений, осторожный физик сказал бы, что это величина порядка дециметра.

Качественный вид изменения скорости с глубиной приведен на рисунке 4,*а* – сплошная кривая. Показана «ступенька» при y_*, характерная для сыпучих сред. А штриховая кривая изображает случай деревянного шарика того же радиуса, упавшего в воду с той же начальной скоростью v_0. Его торможение будет происходить быстрее (так как из выражения (1) следует, что

$$\frac{dv}{dt} \sim \frac{\rho_\text{воды}}{\rho_\text{дерева}} = \frac{10^3}{0{,}5\cdot 10^3} = 2 > \frac{\rho_\text{п}}{\rho_\text{ст}} \approx \frac{1}{5}),$$

а при y_A движение на мгновение прекратится, и шарик начнет всплывать

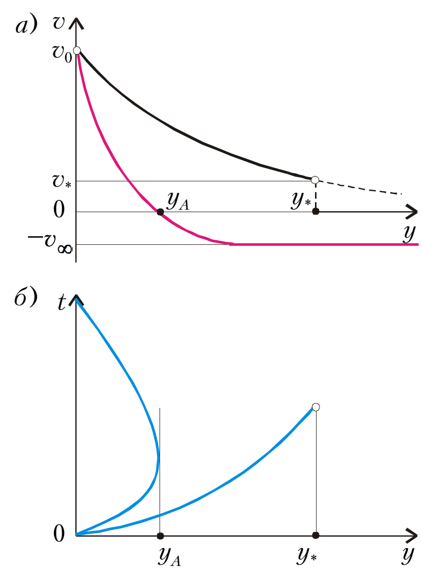

Рис. 4

(скорость изменит знак). Если глубина его проникновения достаточно велика, то на обратном пути вверх будет достигнута постоянная скорость всплывания $-v_\infty$, при которой сравняются силы сопротивления, тяжести и Архимеда.

На рисунке 4,*б* показан соответствующий вид зависимостей глубины от времени.

Артиллеристы издавна живо интересовались глубиной проникновения в различные среды снарядов разной массы, формы, начальной скорости (в момент удара). В результате они получали эмпирические зависимости, осредненные по различным ситуациям. Эти формулы дают – например, для интересующего нас песка – меньшие значения глубины проникновения, чем полученные нами. И понятно, почему. Ведь мы не учли очень многое. А именно: дополнительные потери энер-

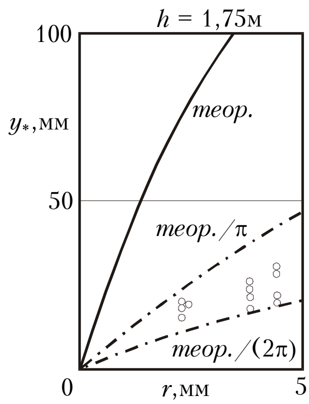

Рис. 5

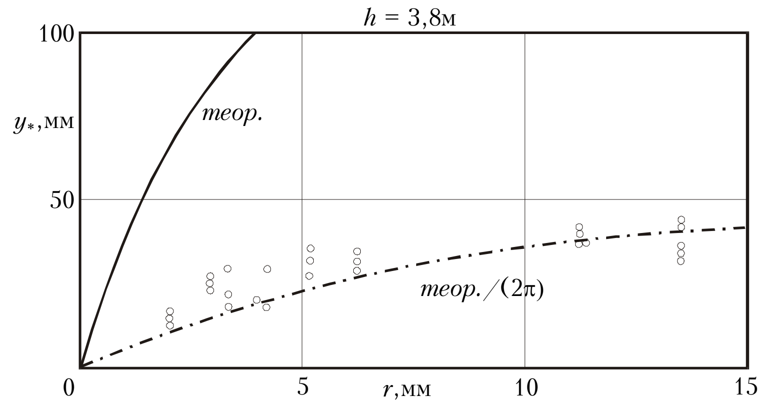

Рис. 6

гии на выброс массы песка (на образование кратеров, так хорошо видных на Луне); силу трения песчинок о шарик (учтена только сила лобового сопротивления); возможную влажность песка (как известно, из мокрого песка хорошие дети делают «куличики» с почти вертикальными поверхностями, а плохие лепят «снежки», чтобы кидаться, – и все это рассыпается при высыхании); возможную «слежалость» песка (на глубинах порядка нескольких метров, которые интересуют артиллеристов, песок может быть уплотненным по сравнению с верхними слоями)… и так далее.

Как известно, знаменитый Галилей любил ронять предметы с Пизанской башни. Стоило ему устроить внизу детскую песочницу – и он многое узнал бы о *механике сыпучих сред* – обширной стране, лежащей между обычной, ньютоновской, жидкостью и твердым телом.

А что же мальчик на пляже? Скорее всего, он через минуту забыл о своем вопросе. А если нет, то быть ему физиком, а значит, строить модели Мира – упрощать, пренебрегать, ошибаться и уточнять.

Приложение

Любая теория должна проверяться практикой. И автор провел две серии соответствующих экспериментов.

В первой из них, выполненной с одним Студентом, роняли стальные шарики в сахарный песок (дело было на кухне). Разброс результатов получился значительным (рис.5), но теоретическая кривая (сплошная линия) легла заметно выше всех измерений. Оказалось, что по мере проведения опытов сахар становился все «менее сыпучим» (вероятно, из-за влажности воздуха), так что глубина проникновения шарика регулярно уменьшалась со временем. Конечно, можно было бы в качестве сыпучего тела использовать еще гречневую крупу, рис, пшено, растворимый кофе… но это лучше оставить для «Лаборатории «Кванта».

Во второй серии опытов, проведенной в Центральном аэрогидродинамическом институте (ЦАГИ), Инженеры и Ученые роняли шарики различной массы с фиксированной высоты в обыкновенный песок (конечно, предварительно просеянный). Эти результаты представлены на рисунке 6.

Научная честность не позволяет сказать вожделенные слова «эксперимент блестяще подтвердил теорию»: видно отличие в несколько раз, что естественно для теорий, основанных на приближенных предположениях. Но зато стало ясно, что можно ввести единственный «поправочный коэффициент», в который прячется незнание факторов, не учтенных в теории (или нежелание думать о них далее). Ну конечно, физику приятно разделить теоретические данные не на 3 или 4, а на π или 2π – в этом есть что-то фундаментальное (шарики ведь круглые). На рисунках 5 и 6 штрихпунктирными линиями как раз и показаны результаты такого деления. Можно не сомневаться, что наши читатели придумают что-нибудь получше. Чего им и желаем.