№ 4, 2001 г. / Олимпиады

# LXIV Московская математическая олимпиада

# Избранные задачи Московской физической олимпиады

# V Международная астрономическая олимпиада

# LXIV Московская математическая олимпиада

### *Математический праздник*

*6 класс*

**1.** Решите ребус: $AX \cdot УX = 2001$.

*А.Блинков*

**2.** Офеня [1] купил на оптовом рынке партию ручек и предлагает покупателям либо одну ручку за 5 рублей, либо три ручки за 10 рублей. От каждого покупателя офеня получает одинаковую прибыль. Какова оптовая цена ручки?

*А.Саблин*

**3.** Наташа и Инна купили по одинаковой коробке чая в пакетиках. Известно, что одного пакетика хватает на две или три чашки чая. Наташе коробки хватило на 41 чашку чая, а Инне – на 58 чашек. Сколько пакетиков было в коробке?

*А.Спивак, И.Ященко*

**4.** Расставьте по кругу 6 различных чисел так, чтобы каждое из них равнялось произведению двух соседних.

*А.Митягин*

**5.** Вифсла, Тофсла и Хемуль играли в снежки. Первый снежок бросил Тофсла. Затем в ответ на каждый попавший в него снежок Вифсла бросал 6 снежков, Хемуль – 5, а Тофсла – 4 снежка. Через некоторое время игра закончилась. Найдите, в кого сколько снежков попало, если мимо цели пролетели 13 снежков. (В себя самого снежками не кидаются.)

*Т.Голенищева-Кутузова, В.Клепцын*

**6.** Поля клетчатой доски размером $8 \times 8$ будем по очереди закрашивать в красный цвет так, чтобы после закрашивания каждой следующей клетки фигура, состоящая из закрашенных клеток, имела ось симметрии. Покажите, как можно закрасить а) 26; б) 28 клеток, соблюдая это условие. (В качестве ответа расставьте на тех клетках, которые должны быть закрашены, числа от 1 до 26 или до 28 в том порядке, в котором проводилось закрашивание.)

*И.Акулич*

[1] *Продавец в разнос, коробейник.*

*7 класс*

**1.** В книге рекордов Гиннесса написано, что наибольшее известное простое число равно $23021^{377} - 1$. Не опечатка ли это?

*С.Маркелов*

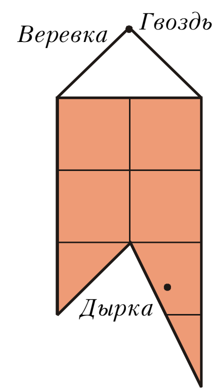
**2.** Приходя в тир, игрок вносит в кассу 100 рублей. После каждого удачного выстрела количество его денег увеличивается на 10%, а после каждого промаха уменьшается на 10%. Могло ли после нескольких выстрелов у него оказаться 80 рублей 19 копеек?

*И.Ященко*

**3.** Для постройки типового дома не хватало места. Архитектор изменил проект: убрал 2 подъезда и добавил 3 этажа. При этом количество квартир увеличилось. Он обрадовался и решил убрать еще 2 подъезда и добавить еще 3 этажа. Могло ли при этом квартир стать даже меньше, чем в типовом проекте? (В каждом подъезде одинаковое число этажей, а на всех этажах во всех подъездах одинаковое число квартир.)

*Т.Голенищева-Кутузова, В.Гуровиц, П.Кожевников, И.Ященко*

**4.** В стене имеется маленькая дырка (точка). У хозяина есть флажок следующей формы (см. рисунок). Покажите на рисунке все точки, в которые можно вбить гвоздь так, чтобы флажок закрывал дырку.




*А.Шень*

**5.** Отметьте на доске $8 \times 8$ несколько клеток так, чтобы любая (в том числе и любая отмеченная) клетка граничила по стороне ровно с одной отмеченной клеткой.

*А.Спивак*

### *Задачи для старших классов*

*8 класс*

**1.** На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник шириной 200 и высотой 100 клеток. Его закрашивают по клеткам, начав с левой верхней и идя по спирали (дойдя до края или до закрашенной части, поворачивают направо). Какая клетка будет закрашена последней? (Укажите номер ее строки и столбца; например, нижняя правая клетка стоит в 100-й строке и 2000-м столбце).

*А.Хачатурян*

**2.** Можно ли последовательно поставить на плоскости 100 точек так, чтобы никакие три не лежали на одной прямой и чтобы в любой момент фигура, состоящая из уже поставленных точек, имела ось симметрии?

*И.Акулич*

**3.** Даны шесть слов: ЗАНОЗА, ЗИПУНЫ, КАЗИНО, КЕФАЛЬ, ОТМЕЛЬ, ШЕЛЕСТ. За один шаг можно заменить любую букву в любом из этих слов на любую другую. Сколько шагов нужно, чтобы сделать все слова одинаковыми (допускаются и бессмысленные)?

*В.Доценко, А.Шень*

**4.** См. задачу М1783 «Задачника «Кванта».

**5.** Леша задумал двузначное число, а Гриша пытается его отгадать, называя двузначные числа. Он отгадал, если одну цифру назвал правильно, а в другой ошибся не более чем на единицу (например, если задумано 65, то 65, 64 и 75 подходят, а 63, 76 и 56 – нет). Придумайте способ, гарантирующий Грише успех за 22 попытки.

*Фольклор*

**6** (Продолжение задачи 5). Покажите, что нет способа, гарантирующего Грише успех за 18 попыток.

*9 класс*

**1.** Можно ли расставить на футбольном поле четырех футболистов так, чтобы попарные расстояния между ними составляли 1, 2, 3, 4, 5 и 6 метров?

*А.Митягин*

**2.** В некоторой стране суммарная зарплата 10 процентов самых высокооплачиваемых работников составляет 90 процентов зарплаты всех работников. Может ли быть, что в каждом из регионов, на которые делится страна, зарплата любых 10% работников составляет не более 11% всей зарплаты, выплачиваемой в этом регионе?

*М.Вялый*

**3.** Внутри угла с вершиной $M$ отмечена точка $A$. Из этой точки выпустили шар, который отразился от одной стороны угла в точке $B$, затем от другой стороны в точке $C$ и вернулся в $A$ («угол падения» равен «углу отражения»). Докажите, что центр $O$ окружности, описанной около $\Delta BCM$, лежит на прямой $AM$.

*А.Заславский*

**4.** Камни лежат в трех кучах: в одной 51, в другой 49, а в третьей 5 камней. Разрешается объединять любые кучи в одну, а также разделять кучу из четного числа камней на две равные. Можно ли получить 105 куч по одному камню в каждой?

*В.Клепцын*

**5.** Натуральное число $N$ в 999…99 ($k$ девяток) раз больше суммы своих цифр. Укажите все возможные значения $k$ и для каждого из них приведите пример такого числа.

*Г.Гальперин*

**6.** Участники шахматного турнира сыграли друг с другом по одной партии. Для каждого участника $A$ было подсчитано число набранных им очков (за победу дается 1 очко, за ничью – $1/2$ очка, за поражение – 0 очков) и коэффициент силы по формуле: сумма очков тех участников, у кого $A$ выиграл, минус сумма очков тех, кому он проиграл. Могут ли коэффициенты силы всех участников быть а) больше 0; б) меньше 0?

*А.Толпыго*

### 10 класс

**1.** Существуют ли три квадратных трехчлена, каждый из которых имеет корень, а сумма любых двух не имеет корней?

*А.Белов*

**2.** См. задачу М1781 «Задачника «Кванта».

**3.** Приведите пример многочлена $P(x)$ степени 2001, для которого выполняется тождество $P(x)+P(1-x)=1$.

*В.Сендеров*

**4.** В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AH_A$, $BH_B$ и $CH_C$. Докажите, что треугольник с вершинами в точках пересечения высот треугольников $AH_BH_C$, $BH_AH_C$, $CH_AH_B$ равен треугольнику $H_AH_BH_C$.

*А.Акопян*

**5.** На двух клетках шахматной доски стоят черная и белая фишки. За один ход любую из них можно передвинуть на соседнюю клетку по вертикали или горизонтали (две фишки не могут стоять на одной клетке). Могут ли в результате таких ходов встретиться все возможные варианты расположения двух фишек, причем ровно по одному разу?

*А.Шаповалов*

**6.** В игре «Десант» две армии захватывают страну. Они ходят по очереди, каждым ходом занимая один из свободных городов. Первый город захватывается с воздуха, а каждым следующим ходом можно захватить любой город, соединенный дорогой с каким-то городом, уже занятым этой армией. Если таких нет, армия прекращает боевые действия (при этом, возможно, другая продолжает). Найдется ли такая схема городов и дорог, что армия, ходящая второй, сможет захватить более половины всех городов, как бы ни действовала первая? (Число городов конечно, каждая дорога соединяет ровно два города.)

*П.Грозман, А.Шаповалов, Д.Шаповалов*

### 11 класс

**1.** Существуют ли три квадратных трехчлена таких, что каждый имеет два различных действительных корня, а сумма любых двух трехчленов не имеет действительных корней?

*А.Белов*

**2.** Дана геометрическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Известно, что $a_1$, $a_{10}$, $a_{30}$ – натуральные числа. Верно ли, что $a_{20}$ – также натуральное число?

*Фольклор*

**3.** В неравнобедренном треугольнике $ABC$ точка $I$ – центр вписанной окружности, $I'$ – центр окружности, касающейся стороны $AB$ и продолжений сторон $CB$ и $CA$; $L$ и $L'$ – точки, в которых сторона $AB$ касается этих окружностей. Докажите, что прямые $IL'$, $I'L$ и высота $CH$ треугольника $ABC$ пересекаются в одной точке.

*А.Заславский*

**4.** Докажите, что не существует многочлена $Q(x)$ степени не ниже двух с целыми неотрицательными коэффициентами, значение которого при любом простом значении $x$ является простым числом.

*А.Белов*

**5.** Докажите, что в пространстве существует 2001 выпуклый многогранник, никакие три из которых не имеют общих точек, а любые два касаются друг друга (т.е. имеют хотя бы одну общую граничную точку, но не имеют общих внутренних точек).

*А.Белов*

**6.** По кругу расставлено несколько коробочек, в которых лежат шарики (коробочка может быть и пустой). За один ход разрешается взять все шарики из какой-то коробочки и разложить их, начиная со следующей коробочки, двигаясь по часовой стрелке и кладя в каждую коробочку по одному шарику.

а) Докажите, что если шарики всегда берут из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходе, то в какой-то момент повторится начальное размещение шариков.

б) Докажите, что за несколько ходов из любого начального размещения шариков можно получить любое другое.

*В.Гуровиц*

## Избранные задачи отбора на Российскую олимпиаду

**1.** Напомним правила игры «Жизнь». На клетчатом листе стоит несколько фишек. Их расположение во всех клетках одновременно меняется следующим образом. Если в клетках, соседних с данной (по стороне или углу), стоит ровно 3 фишки, то в данную клетку ставится фишка (если ее не было). Если в соседних клетках более 3 или менее 2 фишек, то фишка снимается (если она была). Если в соседних клетках ровно 2 фишки, то состояние клетки не меняется.

Докажите, что в игре «Жизнь» на квадрате $2001\times 2001$ существует конфигурация, не имеющая прообраза. (9) [2]

*А.Белов*

**2.** Единичный квадрат разбит на три многоугольника. Докажите, что диаметр хотя бы одного из них не меньше $\sqrt{65}/8$. (9)

*Фольклор*

---

[2] *В скобках после условия задачи указан класс, в котором она предлагалась.*

**3.** Фокусник угадывает поочередно масть всех карт в колоде из 52 карт. После каждого ответа ему сообщают, угадал он или ошибся. Докажите, что существует стратегия, позволяющая угадать не менее 13 карт, и нет стратегии, позволяющей гарантированно угадать больше. (10)

*И.Изместьев*

**4.** В треугольнике $ABC$ отмечена точка $O$ и из нее опущены перпендикуляры $OA_1$, $OB_1$, $OC_1$ на стороны $BC$, $AC$, $AB$. Пусть $A_2$, $B_2$, $C_2$ – вторые точки пересечения прямых $AO$, $BO$, $CO$ с окружностью, описанной около $\Delta ABC$. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны. (10)

*А.Заславский*

**5.** Найдите для каждого натурального $n > 1$ все функции (не обязательно непрерывные), которые удовлетворяют уравнению $f(x+y) = f^n(x) + f^n(y)$. (10)

*Б.Френкин*

**6.** Будем рассматривать последовательности длины $n$, состоящие из $\pm1$. Произведением последовательностей $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ назовем последовательность $\{x_iy_i\}$. Докажите, что для любых $k$ различных последовательностей $s_1, \ldots, s_k$ найдется последовательность $s$ такая, что количество последовательностей, одновременно принадлежащих множествам $Z = \{s_1, \ldots, s_k\}$ и $sZ = \{ss_1, \ldots, ss_k\}$, не превосходит $k^2/2^n$. (10)

*А.Белов, В.Сендеров*

**7.** Прямые разбивают верхнюю полуплоскость на многоугольники, диаметр каждого из которых меньше 1, а все стороны больше 0,000001. Докажите, что один из многоугольников можно выдвинуть вниз, не смещая остальные. (10)

*А.Белов*

*Публикацию подготовили А.Спивак, Б.Френкин*

# Избранные задачи Московской физической олимпиады

### *Первый теоретический тур*

*8 класс*

**1.** В кубический сосуд емкостью $V = 3$ л залили $m = 1$ кг воды и положили $m = 1$ кг льда. Начальная температура смеси $t_1 = 0\ ^\circ\text{C}$. Под сосудом сожгли $m_1 = 50$ г бензина, причем доля $\alpha = 80\%$ выделившегося при этом тепла пошла на нагревание содержимого сосуда. Считая сосуд тонкостенным и пренебрегая теплоемкостью сосуда и тепловым расширением, найдите уровень воды в сосуде после нагрева. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}4 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплота испарения воды $r = 2{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг, удельная теплемкость воды $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг$\cdot^\circ$С), плотность воды $\rho = 1000$ кг/м$^3$, удельная теплота сгорания бензина $q = 4{,}6 \cdot 10^7$ Дж/кг. Считать, что дно сосуда горизонтально.

*Ю.Старокуров*

**2.** Груз неизвестной массы взвешивают, уравновешивая его гирькой известной массы $M$ на концах тяжелого прямого коромысла. При этом равновесие достигается, когда точка опоры коромысла смещается от середины на $x = 1/4$ его длины в сторону гирьки. В отсутствие же груза на втором плече коромысло остается в равновесии при смещении его точки опоры от середины в сторону гирьки на $y = 1/3$ его длины. Считая коромысло однородным по длине, найдите массу взвешиваемого груза $m$.

*В.Птушенко*

**3.** Два одинаковых сообщающихся сосуда наполнены жидкостью плотностью $\rho_0$ и установлены на горизонтальном столе. В один из сосудов кладут маленький груз массой $m$ и плотностью $\rho$. На сколько будут после этого отличаться силы давления сосудов на стол? Массой гибкой соединительной трубки с жидкостью можно пренебречь.

*О.Шведов*

*9 класс*

**1.** Две материальные точки *1* и *2* и точечный источник света $S$ совершают равномерное прямолинейное движение по горизонтальной плоскости. Тени от материальных точек движутся со скоростями, равными $u$, вдоль вертикальных стенок, которые перпендикулярны друг другу (рис.1). Скорости материальных точек равны $v = 2u/\sqrt{3}$ и направлены под углом $\alpha = 30^\circ$ к соответствующим стенкам. Чему равна и куда направлена скорость источника $S$?

*Рис. 1*

*О.Шведов*

**2.** Автомобиль проехал по пятикилометровому участку дороги. Специаль-

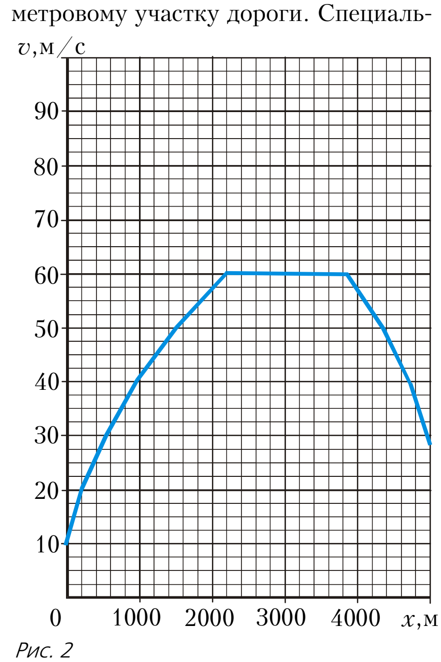


*Рис. 2*

ный прибор при этом записывал показания спидометра через каждые 10 метров. В результате получилась зависимость скорости автомобиля $v$ от пройденного пути $x$, показанная на рисунке 2. Оцените, за какое время $t$ автомобиль проехал эти пять километров.

*А.Андрианов*

**3.** Эскалатор метро движется со скоростью $v$. Пассажир заходит на эскалатор и начинает идти по его ступенькам следующим образом: делает шаг на одну ступеньку вперед и два шага по ступенькам назад. При этом он добирается до другого конца эскалатора за время $t$. Через какое время $t_1$ пассажир добрался бы до конца эскалатора, если бы шел другим способом: делал два шага вперед и один шаг назад? Скорость пассажира относительно эскалатора при движении вперед и назад одинакова и равна $u$. Считать, что размеры ступеньки много меньше длины эскалатора.

*А.Якута*

**4.** Тонкая гладкая спица длиной $L$ вращается с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси, к которой прикреплен один из ее концов. Угол между спицей и вертикальной осью равен $\alpha$. На спицу насажена маленькая бусинка, которая в начальный момент находится на середине спицы и покоится относительно нее. При какой угловой скорости $\omega$ вращения спицы вокруг вертикальной оси бусинка слетит со спицы?

*Р.Компанеец*

*10 класс*

**1.** Два тела имеют одинаковые ребристые поверхности (рис.3). Какую среднюю силу $F$ в горизонтальном направлении, перпендикулярном ребрам, нужно приложить к верхнему телу массой $m$, чтобы медленно тащить его по неподвижной горизонтальной поверхности второго тела с постоянной (в среднем) скоростью? Все ребра одинаковые, симметричные, имеют ширину $l$ и высоту $h$. Поверхности граней ребер гладкие, их соударения абсолютно неупругие.

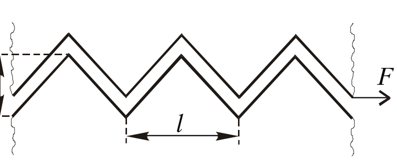


Рис. 3

*В.Птушенко*

**2.** Петя и Вася решили построить плоты из пустых консервных банок без крышек. Петя предложил расположить банки в один слой донышками вверх, а Вася – донышками вниз. Пренебрегая давлением насыщенных паров и поверхностным натяжением воды и считая, что оба плота будут медленно опускаться на воду так, что донышки банок будут параллельны ее поверхности, оцените, кому и на сколько больше понадобится банок для постройки плота грузоподъемностью $M = 1000$ кг. Считать, что площадь дна банки $S = 0{,}01\ \text{м}^2$, высота банки $H = 0{,}1$ м, масса банки $m = 0{,}01$ кг, плотность воды $\rho = 1000\ \text{кг/м}^3$, ускорение свободного падения $g = 10\ \text{м/с}^2$, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

*Д.Харабадзе*

**3.** Над одним молем идеального одноатомного газа совершается процесс, изображенный на $pV$-диаграмме (рис.4). Постройте график зависимости теплоемкости газа в данном процессе от температуры.

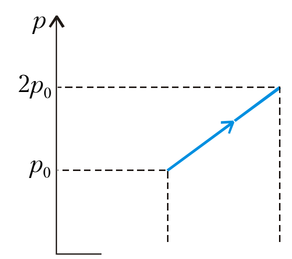


Рис. 4

*О.Шведов*

**4.** При подключении к батарейке резистора сопротивлением $R$ через нее течет ток $I$. При подключении к этой же батарейке резистора, соединенного последовательно с неизвестным резистором, через нее течет ток $(3/4)I$. Если же резистор соединить с тем же неизвестным резистором параллельно и подключить к этой же батарейке, то через нее будет течь ток $(6/5)I$. Найдите сопротивление $R_x$ неизвестного резистора.

*О.Шведов*

*11 класс*

**1.** Квадратная рамка, изготовленная из тонкого проводника, подключена к батарейке с ЭДС $\mathcal{E}$. Ток, текущий по рамке, создает в ее центре магнитное поле с индукцией $B$. Чему будет равна индукция $B_1$ магнитного поля в центре рамки из того же проводника, если ее размер увеличить вдвое, а ЭДС батарейки оставить неизменной? Внутренним сопротивлением батарейки пренебречь.

*Примечание.* Индукция магнитного поля, создаваемая движущимся зарядом в некоторой точке, определяется величиной заряда, его скоростью $\vec{v}$, расстоянием $\vec{r}$ до точки, углом между вектором скорости и прямой, соединяющий заряд и точку, константой $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Н/А}^2$ и направлена перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $\vec{v}$ и $\vec{r}$.

*О.Шведов*

**2.** Имеется толстая плоско-выпуклая однородная осесимметричная линза (рис.5). Радиус $R$ ее плоского основания равен ее толщине. Угол $\alpha$ между ограничивающими ее поверхностями в месте их пересечения меньше 90°. На оси симметрии линзы со стороны плоского основания помещают точечный источник света. Расстояние от него до линзы $R$. Выпуклая поверхность линзы гладкая, а ее форма такова, что все лучи, прошедшие через линзу без отражений, образуют строго параллельный пучок с плоским фронтом, диаметр которого равен диаметру линзы. Определите угол $\alpha$.

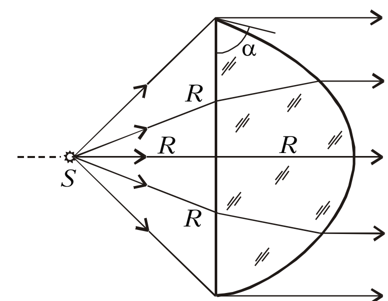


Рис. 5

*Р.Компанеец*

## Второй теоретический тур

*8 класс*

**1.** Художник нарисовал «Зимний пейзаж» (рис.6). Как вы думаете, в каком месте на Земле он мог писать с такой натуры?

*М.Семенов*


Рис. 6

**2.** На краю крыши висят сосульки конической формы, геометрически подобные друг другу, но разной длины. После резкого потепления от $t_1 = 0\,^\circ\mathrm{C}$ до $t_2 = 10\,^\circ\mathrm{C}$ самая маленькая сосулька длиной $l = 10$ см растаяла за время $\tau = 2$ ч. За какое время $\tau_1$ растает большая сосулька длиной $L = 30$ см, если внешние условия не изменятся?

*М.Семенов*

**3.** На улице идет сильный дождь. Его капли массой $m = 0{,}1$ г падают вертикально со скоростью $v_1 = 3$ м/с, причем в каждом кубометре воздуха содержится $N = 100$ капель. Школьник хочет перебежать из своего дома к приятелю в соседний дом, который находится на расстоянии $L = 50$ м, и при этом вымокнуть как можно меньше. Скорость бега может быть любой, но не выше $v_2 = 10$ м/с. Какова минимальная масса воды $M$, которая попадет на школьника во время пробежки, если площадь проекции его тела на горизонтальную плоскость равна $S_1 = 0{,}16\ \mathrm{м}^2$, а на вертикальную – $S_2 = 0{,}45\ \mathrm{м}^2$?

*М.Семенов*

## 9 класс

**1.** Автомобиль движется с постоянной скоростью по прямолинейному участку дороги. Другой автомобиль равномерно движется по дуге окружности радиусом $R = 200$ м. График зависимости модуля относительной скорости автомобилей от времени изображен на рисунке 7. Найдите величину скоростей автомобилей.

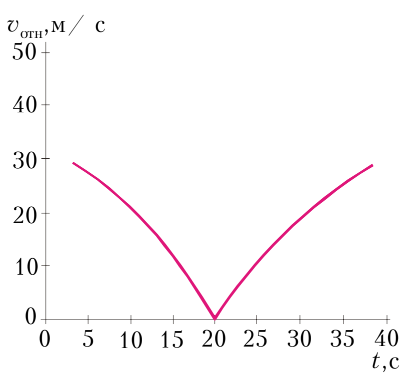



Рис. 7

*О.Шведов*

## 10 класс

**1.** Т-образный маятник состоит из трех одинаковых жестко скрепленных невесомых стержней длиной $L$, два из которых являются продолжением друг друга, а третий перпендикулярен им (рис.8). К свободным концам стержней, находящихся в одной вертикальной плоскости, прикреплены точечные грузы массой $m$. Маятник может без трения вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку скрепления стержней и перпендикулярной им. Маятник отклонили от положения равновесия на угол $\alpha < 90^\circ$ и отпустили без начальной скорости. С какой силой стержень действует на груз *3* сразу после отпускания маятника?

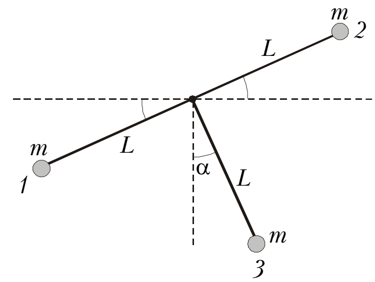



Рис. 8

*С.Варламов*

**2.** В результате взрыва снаряда массой $m$, летевшего со скоростью $v$, образовались два одинаковых осколка. Пренебрегая массой взрывчатого вещества, найдите максимальный угол $\alpha$ разлета осколков, если сразу после взрыва их общая кинетическая энергия увеличилась на $\Delta W$.

*В.Погожев*

**3.** Раствор этилового спирта в воде, имеющий концентрацию $n = 40\%$ по объему, находится в герметично закрытой бутылке, занимая 90% ее объема. Известно, что раствор заливали в бутылку и закрывали ее при температуре $t_1 = 0\,^\circ\mathrm{C}$ и атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па. Чистый этиловый спирт кипит при этом давлении при температуре $t_2 = 77\,^\circ\mathrm{C}$. Давление насыщенных паров воды при температуре $t_2$ равно $p_н = 4{,}18 \cdot 10^4$ Па. Какое давление установится над жидкостью в этой бутылке при температуре $t_2$? Давлением насыщенных паров спирта и воды при температуре $t_1$ можно пренебречь.

*С.Варламов*

**4.** Два плоских зеркала образуют двугранный угол. Точечный источник света находится внутри этого угла и равноудален от зеркал. При каких значениях угла $\alpha$ между зеркалами у источника будет ровно 100 различных изображений?

*Р.Компанеец*

## 11 класс

**1.** Для подтверждения своей водительской квалификации автомобилист должен выполнить следующее упражнение: за ограниченное время проехать расстояние $L = 50$ м между точками *1* и *2*, начав движение в точке *1* и остановившись в конце пути в точке *2*. Какое наименьшее время $t$ для этого необходимо, если наибольшая мощность, развиваемая двигателем автомобиля, равна $P = 80$ кВт, а тормозной путь автомобиля при скорости $v = 80$ км/ч составляет $l_т = 50$ м? Масса автомобиля $m = 1000$ кг.

*В.Птушенко*

**2.** В схеме, изображенной на рисунке 9, конденсаторы, емкости которых $C_1 = C_2 = C$, первоначально не заряжены, а диоды идеальные. Ключ $K$ начинают циклически переключать, замыкая его вначале в положение *1*, а потом – в положение *2*. Затем цикл переключений повторяется, и т.д. Каждое из переключений производится после того, как токи в цепи прекращаются. Какое количество таких циклов переключений надо произвести, чтобы заряд на конденсаторе емкостью $C_2$ отличался от своего установившегося (при $n \to \infty$) значения не более чем на 0,1%?

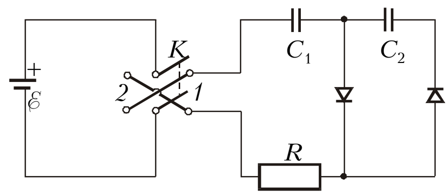



Рис. 9

*М.Семенов*

*Публикацию подготовили М.Семенов, А.Якута*

# V Международная астрономическая олимпиада

*Очередная, уже пятая, международная астрономическая олимпиада школьников прошла с 20 по 27 октября 2000 года в Специальной астрофизической обсерватории РАН на Северном Кавказе. В олимпиаде приняли участие 8 национальных команд из Армении, Белоруссии, Болгарии, Бразилии, Индии, России (включая отдельную команду Москвы) и Украины.*

*Олимпиада включала в себя три тура: теоретический, практический и наблюдательный. Официальными языками олимпиады были русский и английский; на этих языках Оргкомитет подготовил задания, а перед турами руководители команд могли перевести задания на родные языки участников. Школьники были разделены на две группы: 8—10 классы (возраст участников до 15,8 лет) и 11—12 классы (до 17,8 лет).*

*Ниже приводятся условия задач теоретического тура и список призеров олимпиады.*

## Теоретический тур

### 8–10 классы

**1.** Как вы знаете, наиболее распространенным календарем в средние века был Юлианский. Сейчас большинство стран используют Григорианский календарь. Разница между Юлианским и Григорианским календарями составляет 13 дней: для одного и того же дня даты Юлианского календаря отстают на 13 от дат Григорианского календаря. Последний раз даты в этих календарях совпадали в 3-м веке. Вычислите, в каком веке эта разница составит 1 год и, например, 22 октября по Григорианскому календарю вновь совпадет с 22 октября по Юлианскому календарю.

**2.** Две звезды имеют одинаковые видимые звездные величины и одинаковые спектральные классы. Но одна расположена вдвое дальше другой. Как соотносятся размеры эти звезд?

**3.** На рисунке 1 представлены два фотоснимка Луны, полученные одной и той же камерой, установленной на одном и том же телескопе (телескоп расположен на Земле). Первый снимок был сделан, когда Луна находилась вблизи перигея, второй – когда вблизи апогея. Найдите по этим данным величину эксцентриситета лунной орбиты. Оцените минимальный период времени между моментами, когда эти снимки могли быть сделаны.

Рис. 1

**4.** Космонавт летит на космическом корабле на высоте 100 км над Морем Холода (Луна). Астронавт гуляет по поверхности Луны в Море Холода, где сейчас дневное время суток (светит Солнце). Может ли космонавт обнаружить этого астронавта с помощью 20-кратного бинокля? Принять во внимание все возможности.

**5.** На спутнике некоторой планеты «Олимпия» находится радиоисточник. Этот радиоисточник работает все время, но наблюдатель регистрирует сигнал не все время из-за затмений спутника планетой. На рисунке 2 показана зависимость уровня сигнала, получаемого наблюдателем, в зависимости от времени. Найдите по этим данным среднюю плотность планеты. Орбиту спутника можно считать круговой, наблюдатель находится в плоскости орбиты спутника, а «Олимпия» расположена далеко от наблюдателя.

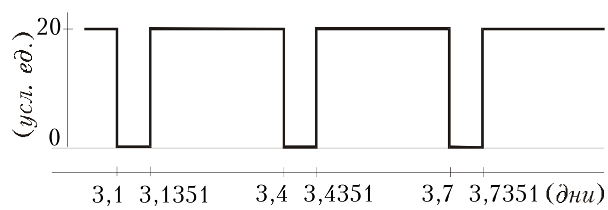



Рис. 2

**6.** 1,2-метровая камера Шмидта имеет поле зрения $6\times6^\circ$. Оцените, сколько фотографий нужно получить этой камерой, чтобы покрыть все небо. (Сделайте, пожалуйста, оценку максимального и минимального числа фотоснимков.) Объясните ваши вычисления. Где вы должны установить телескоп, чтобы выполнить поставленную задачу?

### 11–12 классы

**1.** При наблюдении квазара обнаружено, что линия в его спектре, имеющая лабораторную длину волны 3000 Å, наблюдается на волне 15000 Å. Оцените: а) с какой скоростью удаляется от нас квазар; б) каково расстояние до него, если постоянная Хаббла $H = 75$ км/(с · Мпк). Оба ответа могут быть даны с точностью 30%.

**2.** Молодые ученые из республики Коми (Российская Федерация) зарегистрировали несколько дней назад новый объект, напоминающий затменно-переменную звезду. Однако период этой звезды непостоянен: звездная величина объекта, составляющая обычно $24{,}32^m$, каждые 7–11 секунд увеличивается до $24{,}52^m$ на 0,2–0,3 секунды. После исследований выяснилось, что светящийся объект – это глаза группы абсолютно черных котов, сидящих на абсолютно черном теле в нашей Солнечной системе и смотрящих в сторону Солнца! И один из котов моргает! Вычислите число котов в этой группе. Поясните решение рисунком. Считайте, что размеры всех котов одинаковы.

**3–6.** См. задачи 3–6 для 8–10 классов.

## Призеры олимпиады

**Дипломы I степени получили**

*Агарвал Т.* – Индия,
*Бадьин Д.* – Россия,
*Бхалерао В.* – Индия,
*Булах В.* – Россия,
*Квасов И.* – Россия.

**Дипломы II степени получили**

*Балуев Р.* – Россия,
*Иванов М.* – команда Москвы,
*Джа М.* – Индия,
*Кумар В.* – Индия,
*Лебедев А.* – команда Москвы,
*Прабху В.* – Индия,
*Руфат Д.* – Болгария,
*Шахвердян Т.* – Армения,
*Войцик П.* – команда Москвы.

**Дипломы III степени получили**

*Иванов А.* – Россия,
*Джаянти Ш.* – Бразилия,
*Константинов С.* – Россия,
*Крумов В.* – Болгария,
*Нагаев М.* – Россия,
*Подлесных Д.* – команда Москвы,
*Скоморохов Р.* – Болгария,
*Соколовский К.* – команда Москвы.

*Публикацию подготовил*
*М.Гаврилов*

---

## Магнитные явления

*(Начало см. на с. 45)*

возникающая в стержне с координатой $x_1$, $\mathscr{E}_{i2} = x_2' l B_0$ – ЭДС индукции во втором стержне, $R$ – их внутренние сопротивления. Закон Ома для этой схемы имеет вид

$$x_2' l B_0 - x_1' l B_0 = 2IR.$$

Объединив последние три уравнения, получим

$$x_2'' - x_1'' = -\frac{(lB_0)^2}{mR}\left(x_2' - x_1'\right),$$

или, обозначив $x_2 - x_1 = z$,

$$z'' + \frac{(lB_0)^2}{mR} z' = 0.$$

После интегрирования запишем

$$z' + \frac{(lB_0)^2}{mR} z = \text{const}.$$

Из начальных условий следует, что

$$\text{const} = \frac{(lB_0)^2}{mR} b - 2v_0.$$

При $t \to \infty$ $z' \to 0$, поэтому для конечного расстояния между стержнями найдем

$$b_к = b - \frac{2v_0 mR}{(lB_0)^2} = \frac{b}{2}.$$

**Упражнения**

**1.** Какова индукция магнитного поля, создаваемого вращением электрона по круговой орбите радиусом $r = 0{,}53 \cdot 10^{-8}$ см, вблизи протона? Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

*Указание.* Индукция магнитного поля в центре кольца с током $I$ равна $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$, где $R$ – радиус кольца.

**2.** На непроводящей горизонтальной поверхности стола лежит проводящая жесткая тонкая квадратная рамка из однородного куска провода со стороной $a$. Рамка находится в однородном горизонтальном магнитном поле, линии индукции которого параллельны одной из диагоналей квадрата рамки. Масса рамки $m$, величина индукции $B$. Какой ток нужно пропустить по рамке, чтобы она начала приподниматься относительно одной из вершин квадрата?

**3.** По оси длинного металлического цилиндра натянута заряженная нить, на единицу длины которой приходится заряд $q = 10^{-7}$ Кл/м. Цилиндр вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = 10^3$ с$^{-1}$. Пренебрегая центробежными эффектами, определите индукцию магнитного поля внутри металла, в полости цилиндра и во внешнем пространстве вдали от торцов цилиндра.

*Указание.* Индукция магнитного поля внутри длинного соленоида с числом витков $N$ и длиной $L$ равна $B = \mu_0 NI/L$, где $I$ – ток в соленоиде.

**4*.** Частица с зарядом $q$ и массой $m$ влетает с начальной скоростью $v_0$ в вязкую среду с поперечным однородным магнитным полем с индукцией $B$. Сила вязкого трения пропорциональна скорости частицы: $\vec{F}_{тр} = -\alpha\vec{v}$. На каком расстоянии от начальной точки (точки влета частицы в среду) частица остановится?