



№ 5, 2001 г. / Физический факультатив

А. Стасенко

Вихрь в тумане

© “Квант”

Использование и распространение этого материала
в коммерческих целях
возможно лишь с разрешения редакции



Сетевая образовательная библиотека “VIVOS VOCO!”
(грант РФФИ 00-07-90172)

vivovoco.nns.ru
vivovoco.rsl.ru
www.ibmh.msk.su/vivovoco

Вихрь в тумане

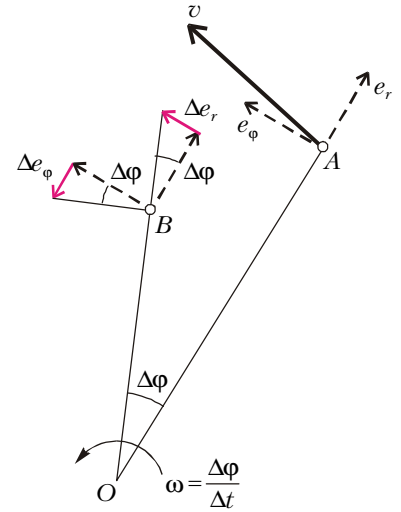
А. СТАСЕНКО

*Также нельзя привести простой и единой причины
...Почему луна в один месяц проходит
Тем же путем круговым, что солнце в год пробегает.
...Можно, во-первых, считать, что все это так происходит,
Как полагает о том Демокрита священное мненье.
То есть, чем ближе к земле проходят светила, тем меньше
Могут они увлекаться вращением небесного вихря,
Ибо стремление его и напор, постепенно слабея
Книзу, становятся меньше...*

Тит Лукреций Кар. О природе вещей

аэродинамических трубах (эта конденсация часто мешает проведению экспериментов). Или чтобы при помощи центробежной сепарации избавиться от микробов, содержащихся в воздухе.

Итак, рассмотрим силы, возникающие при движении частицы (капельки, пылинки) во вращающейся системе координат (см. рисунок). Тут надо поднапрячься и поработать.



Пусть капелька в некоторый момент времени находится в точке A с радиусом-вектором \vec{OA} относительно центра вращения O . Представим ее скорость \vec{v} в виде проекций на систему единичных векторов, т.е. ортов, \vec{e}_r (радиальный) и \vec{e}_ϕ (тангенциальный):

$$\vec{v} = v_r \cdot \vec{e}_r + v_\phi \cdot \vec{e}_\phi.$$

Через некоторый отрезок времени Δt капелька окажется в точке B с другим радиусом-вектором \vec{OB} . Самое интересное здесь то, что орты \vec{e}_r , \vec{e}_ϕ тоже изменятся – конечно, не по величине, поскольку это единичные вектора, а по направлению. Если время Δt малó, угол поворота $\Delta\phi$ радиуса-вектора капельки тоже мал (на рисунке для наглядности он изображен большим), и орты приобретут малые приращения $\Delta\vec{e}_r$ и $\Delta\vec{e}_\phi$. Интересно сразу отметить, что $\Delta\vec{e}_r$ направлено вдоль \vec{e}_ϕ , а $\Delta\vec{e}_\phi$ – против \vec{e}_r . Эти приращения легко найти из треугольников с малым углом $\Delta\phi$ при вершине B :

$$\Delta\vec{e}_r = \vec{e}_r \cdot 2\text{tg} \frac{\Delta\phi}{2}, \quad \Delta\vec{e}_\phi = \Delta\phi \cdot \vec{e}_\phi,$$

$$\Delta\vec{e}_\phi = \vec{e}_\phi \cdot 2\text{tg} \frac{\Delta\phi}{2}, \quad \Delta\vec{e}_r = -\Delta\phi \cdot \vec{e}_r.$$

КОНЕЧНО, С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ СОВРЕМЕННОЙ АСТРОНОМИИ рассуждения Лукреция о «небесном вихре» представляются наивными. Но в них содержится «священное мненье»: с ростом расстояния от Земли (а ведь она – «центр Мира») растет и линейная (окружная) скорость – как, например, в случае вращения твердого цилиндра.

Нас будет интересовать возможность использования вращения для разделения веществ. Но... начнем издалека.

Каждый знает, как в ведре речной воды разделить воду, песок и пузырьки: просто надо подождать некоторое время – песчинки осядут на дно, пузырьки всплывут и лопнут над поверхностью, и останется чистая вода. В случае прозрачного сосуда видно, что частицы песка движутся с постоянной скоростью. Это означает, что сумма сил тяжести, архимедовой и сопротивления движению равна нулю.

Правда, это равновесие наступает не сразу. Например, если уронить стальной шарик в банку с водой, или с глицерином, или с медом, то некоторое время скорость его движения будет изменяться, пока не станет постоянной. Это «некоторое время» называется *временем релаксации* τ . Говорят, что по истечении времени, значительно превышающего τ ,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow 0$$

(здесь m – масса частицы, v – ее скорость).

Можно убедиться, что время τ будет различным для упомянутых жидкостей, а также и для шариков разного размера в одной и той же жидкости. Если шарик маленький, а жидкость достаточно вязкая, можно считать, что

сила сопротивления пропорциональна скорости движения шарика, так что

$$\frac{\vec{F}_{\text{сопр}}}{m} = -\beta \vec{v}_{\text{отн}}$$

(здесь β – коэффициент, который зависит от свойств жидкости и размера шарика). Такие движения называют ползущими, а соответствующую силу – силой Стокса. В этом соотношении подчеркнуто, что имеется в виду скорость шарика относительно жидкости, которая сама тоже может двигаться с некоторой скоростью \vec{V} :

$$\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v} - \vec{V}.$$

А что происходит в тумане? Там капельки воды висят в воздухе довольно долго (иногда часами). Но ведь они падают в поле тяготения Земли (сила Архимеда в этом случае пренебрежимо мала: плотность воды на три порядка больше плотности воздуха). Нельзя ли ускорить разделение воздуха и капельки при помощи каких-либо других сил, например центробежной силы инерции? (Напомним, что о силах инерции имеет смысл говорить только в случае неинерциальных систем отсчета.) Эта сила успешно используется, скажем, при разделении масла и простокваши в центрифугах, где исходный продукт – молоко – приводится в быстрое вращение. Конечно, мы не собираемся вращать весь утренний туман над рекой или аэродромом. Такое вращение иногда возникает самостоятельно, например в вихрях, стекающих с крыла самолета при вираже, – их можно наблюдать на Аэрошоу. А можно специально закрутить поток, чтобы избавиться от сконденсировавшейся воды – например, чтобы предотвратить осушить рабочий воздух в

Сейчас нам это понадобится, чтобы найти малое изменение скорости капельки:

$$\begin{aligned} \vec{\Delta v} &= \Delta \left(v_r \cdot \vec{e}_r + v_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \right) = \\ &= \Delta \left(v_r \cdot \vec{e}_r \right) + \Delta \left(v_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \right) = \\ &= \vec{e}_r \cdot \Delta v_r + v_r \cdot \Delta \vec{e}_r + \vec{e}_\varphi \cdot \Delta v_\varphi + v_\varphi \cdot \Delta \vec{e}_\varphi = \\ &= \vec{e}_r \cdot \Delta v_r + v_r \Delta \varphi \cdot \vec{e}_\varphi + \vec{e}_\varphi \cdot \Delta v_\varphi - v_\varphi \Delta \varphi \cdot \vec{e}_r. \end{aligned}$$

Мы уже подставили сюда выражения для \vec{e}_r и \vec{e}_φ . А теперь, чтобы получить вектор ускорения, разделим все на Δt и сгруппируем слагаемые при единичных векторах \vec{e}_r и \vec{e}_φ :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} &= \vec{e}_r \left(\frac{\Delta v_r}{\Delta t} - v_\varphi \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \right) + \\ &+ \vec{e}_\varphi \left(\frac{\Delta v_\varphi}{\Delta t} + v_r \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \right). \end{aligned}$$

Ясно, что в скобках получились проекции ускорения капельки в принятой нами вращающейся системе координат. Посмотрим на них внимательнее. Что такое $\Delta \varphi / \Delta t$? Это же угловая скорость v_φ / r ! Используя этот замечательный факт и приравняв радиальную и тангенциальную составляющие ускорения капельки соответствующим составляющим силы сопротивления, деленным на массу, получим

$$\begin{aligned} \frac{\Delta v_r}{\Delta t} &= \frac{v_\varphi^2}{r} - \beta(v_r - 0), \\ \frac{\Delta v_\varphi}{\Delta t} &= -\frac{v_r v_\varphi}{r} - \beta(v_\varphi - V_\varphi). \end{aligned}$$

Тут в первом слагаемом правой части первого уравнения легко узнать центробежное ускорение, а коэффициент β во втором слагаемом можно представить в виде $\beta = 1/\tau$ (хотя бы из соображений размерностей). Кроме того, мы рассматриваем случай, когда

радиальная составляющая скорости несущего газа равна нулю, а тангенциальная составляющая $V_\varphi(r)$ — есть произвольная функция радиуса. Такое движение можно, например, осуществить в цилиндрической трубе. А теперь, считая, что капелька очень мала и, значит, быстро «привыкает» к локальным условиям обтекания ее несущей средой, приравняем нулю левые части этих уравнений, т.е. будем рассматривать безынерционное, ползущее движение капельки, аналогичное движению шарика в глицерине. Тогда получим алгебраическую систему уравнений для определения локально установившихся составляющих скорости капельки во вращающейся системе координат:

$$\frac{v_\varphi^2}{r} - \frac{v_r}{\tau} = 0, \quad \frac{v_\varphi - V_\varphi}{\tau} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = 0.$$

Чтобы не возиться с точным решением этой системы уравнений, используем физические соображения. Интуитивно ясно, что очень малые частицы будут двигаться по окружности почти с той же скоростью, что и несущая среда: $v_\varphi \approx V_\varphi$. Это значит, что частица должна сделать много оборотов вокруг оси при незначительном смещении по радиусу, т.е. $v_r \ll v_\varphi \approx V_\varphi$. Принимая значение $v_\varphi = V_\varphi$ в качестве первого приближения, из первого уравнения получим

$$v_r = \frac{\tau}{r} V_\varphi^2.$$

В частном случае $V_\varphi = \omega_0 r$ (несущая среда вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 как твердое тело) найдем

$$v_r = \omega_0^2 r \tau.$$

Учитывая, что $v_r = \Delta r / \Delta t$, решим полученное уравнение (с начальным условием $r = r_0$ при $t = 0$) на «большом» времени ($t \gg \tau$):

$$r = r_0 e^{\omega_0^2 \tau t} = r_0 e^{\omega_0 \tau \varphi} = r_0 e^{\frac{2\pi \tau}{T} \varphi},$$

где $\varphi = \omega_0 t$, $\omega_0 = 2\pi/T$, T — период (хотите — верьте, хотите — проверьте подстановкой). Таким образом, в принятых предположениях частица движется по так называемой логарифмической спирали. (Один Студент, забыв слово «спираль», назвал ее «окружностью переменного радиуса».)

Для тех, кто хочет провести вычисления, разумеется, важно знать, что такое τ . Сила сопротивления для шаровой частицы (сила Стокса) равна

$$F_{\text{сопр}} = 6\pi\eta a(v - V),$$

где a — радиус шарика, а η — вязкость, которую можно найти в справочниках (не забудьте обратить внимание на систему единиц). Тогда

$$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{2 \rho a^2}{9 \eta},$$

где ρ — плотность материала частицы. Например, для случая капельки воды ($\rho = 10^3$ кг/м³) радиусом $a = 1$ мкм = 10^{-6} м в воздухе ($\eta \approx 2 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с)) получим

$$\tau \sim 10^{-5} \text{ с}.$$

Сравним это время, например, со временем одного оборота при закрутке воздуха с такими капельками в трубке радиусом $r_0 = 1$ см с линейной скоростью $V_\varphi = 100$ м/с. Время одного оборота равно

$$T = \frac{2\pi r_0}{V_\varphi} = 2\pi \cdot 10^{-4} \text{ с},$$

что в шестьдесят раз больше τ , так что наши предположения о квазиравновесном движении капельки верны. Отметим, что при этих условиях капелька имеет чудовищное центробежное ускорение:

$$V_\varphi^2 / r_0 \sim 10^6 \text{ м/с}^2 = 10^5 g!$$

Итак, вращайте воздух в кондиционерах — и вы избавитесь от пыли, капель и микробов.

Вниманию наших читателей!

Только на второе полугодие 2001 года, в порядке исключения, подписка на журнал «Квант» (и Приложения к нему) по странам СНГ проводится в редакции.

Адрес редакции: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64 – А

Телефоны редакции: 930-56-48, 930-56-41