№ 6, 2001 г. / Практикум абитуриента

Характерные задачи вступительных экзаменов по физике в Физтехе (МФТИ)

Характерные задачи вступительных экзаменов по физике в МФТИ

В.МОЖАЕВ

Задача 1. *Человеку массой m требуется подтянуть к стене ящик массой $M = 3m$ с помощью каната, перекинутого через блок. Если человек стоит на горизонтальном полу (рис.1), то для достижения цели ему надо тянуть канат с минимальной силой $F_1 = 600$ Н. С какой минимальной силой F_2 необходимо тянуть этому человеку канат, если он упрется в ящик ногами (рис.2)? Части каната, не соприкасающиеся с блоком, горизонтальны. Массой блока и каната пренебречь. (1998 г.)*

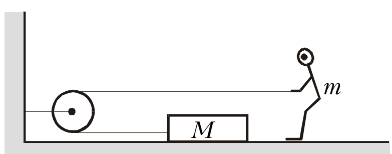

Рис. 1

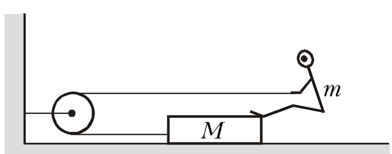

Рис. 2

В первом случае сила, с которой человек тянет канат, очевидно, приложена и к ящику. Поскольку $F_1 > 0$, заключаем, что между ящиком и полом действует сила трения скольжения. Пусть коэффициент трения скольжения между ящиком и полом равен μ. Минимальность силы натяжения каната означает, что

$$F_1 = \mu M g.$$

Во втором случае, когда натяжение каната равно F_2, на систему ящик – человек в горизонтальном направлении будет действовать сила, равная $2F_2$. Условие минимальности силы означает, что

$$2F_2 = \mu(M + m)g.$$

Из полученных уравнений найдем искомую силу:

$$F_2 = \frac{F_1}{2}\frac{(M + m)}{M} = \frac{2}{3}F_1 = 400 \text{ Н}.$$

Задача 2. *Тонкая трубка, запаянная с одного конца, заполнена маслом и закреплена на горизонтальной платформе, вращающейся с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси так, что масло не выливается и заполняет полностью горизонтальное колено трубки (рис.3). Открытое колено трубки вертикально. Геометрические размеры установки даны на рисунке. Атмосферное давление p_0, плотность масла ρ. 1) Найдите давление масла на изгибе трубки. 2) Найдите давление масла у запаянного конца трубки. (1996 г.)*

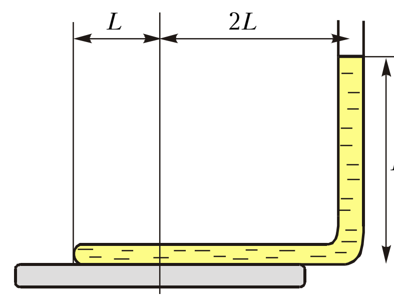

Рис. 3

1) Вращение платформы не сказывается на вертикальном распределении давления масла в вертикальном колене. Поэтому давление масла в месте изгиба трубки равно

$$p_{\text{изг}} = p_0 + \rho g H.$$

2) Рассмотрим горизонтальную часть трубки, заполненную маслом. Трубка вместе с платформой вращается с угловой скоростью ω. Выберем маленький участок масла длиной dr, который находится на расстоянии r от оси вращения (рис.4). Пусть слева от этого участка давление масла p, справа $p + dp$, а площадь сечения трубки S. Поскольку данный элемент масла вращается с угловой скоростью ω, уравнение равномерного движения по окружности радиусом r будет иметь вид

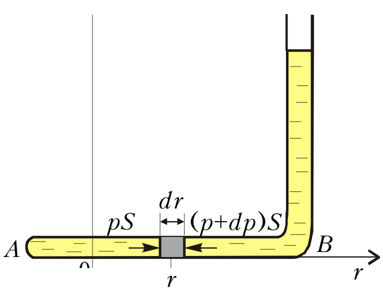

Рис. 4

$$\rho S dr \cdot \omega^2 r = dp \cdot S.$$

Отсюда получаем

$$dp = \rho\omega^2 r\, dr.$$

В интегральном виде это уравнение будет выглядеть так:

$$\int_{p_A}^{p_B} dp = \int_{-L}^{2L} \rho\omega^2 r\, dr.$$

После интегрирования получим

$$p_B - p_A = \frac{\rho\omega^2}{2}\left(4L^2 - L^2\right),$$

или

$$p_A = p_B - \frac{3\rho\omega^2 L^2}{2} = p_0 + \rho g H - \frac{3\rho\omega^2 L^2}{2}.$$

Задача 3. *Атмосфера Венеры состоит в основном из углекислого газа CO_2, масса которого по некоторым оценкам составляет $M = 6 \cdot 10^{16}$ т. Чему равна плотность углекислого газа вблизи поверхности Венеры, если его температура $T = 800$ К? Радиус Венеры $R_В = 6300$ км, а ускорение свободного падения $g_В = 8{,}2\ \text{м}/\text{с}^2$. Толщина атмосферы Венеры много меньше радиуса планеты. (1997 г.)*

Поскольку толщина атмосферы Венеры много меньше ее радиуса, можно считать, что давление углекислого газа на поверхности планеты равно весу углекислого газа атмосферы Венеры, деленному на площадь ее поверхности:

$$p_0 = \frac{Mg_{\text{В}}}{4\pi R_{\text{В}}^2}.$$

Из уравнения состояния идеального газа можно найти плотность CO_2:

$$\rho = \frac{\text{М}p_0}{RT},$$

где М = 44 г/моль – молярная масса углекислого газа, а $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная. С учетом предыдущего выражения для p_0, получим

$$\rho = \frac{\text{М}Mg_{\text{В}}}{4\pi R_{\text{В}}^2 RT} = 6{,}54\ \ \text{кг}/\text{м}^3.$$

Задача 4. *Электрическая цепь состоит из батареи с ЭДС $\mathscr{E}$, резистора сопротивлением R, катушки переменной индуктивности, начальное значение которой L_0, и ключа K (рис.5). Через некоторое время после замыкания ключа ЭДС индукции в катушке оказалась равной U_0. Начиная с этого момента индуктивность катушки изменяют таким образом, что ЭДС в катушке остается неизменной по знаку и по величине и равной U_0. 1) Определите ЭДС индукции в катушке сразу после замыкания ключа. 2) Найдите зависимость индуктивности катушки от времени после начала изменения индуктивности. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь. (1997 г.)*

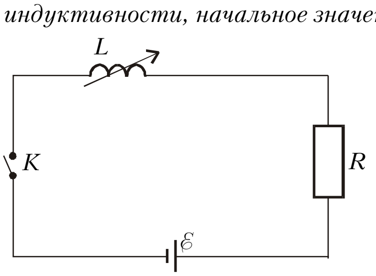

Рис. 5

1) Сразу после замыкания ключа ток в цепи равен нулю. При этом ЭДС индукции в катушке $\mathscr{E}_{i0}$ будет равна ЭДС батареи, взятой с противоположным знаком. Это следует из закона Ома для замкнутой цепи: $\mathscr{E} + \mathscr{E}_{i0} = 0$, откуда

$$\mathscr{E}_{i0} = -\mathscr{E}.$$

2) Пусть в некоторый момент времени ЭДС индукции равна U_0 и «направлена» навстречу ЭДС батареи. Начиная с этого момента ЭДС индукции остается неизменной, следовательно, в соответствии с законом Ома в цепи будет течь постоянный ток:

$$\mathscr{E} - U_0 = I_0 R,\ \text{откуда}\ I_0 = \frac{\mathscr{E} - U_0}{R} = \text{const}.$$

Поскольку ЭДС индукции равна $\dfrac{d(LI)}{dt}$, а ток $I = \text{const} = I_0$, получаем

$$U_0 = \frac{(\mathscr{E} - U_0)}{R}\frac{dL}{dt}.$$

Разделим переменные:

$$dL = \frac{U_0 R}{\mathscr{E} - U_0}dt,$$

проинтегрируем:

$$\int_{L_0}^{L} dL = \frac{U_0 R}{\mathscr{E} - U_0}\int_0^t dt$$

и найдем зависимость индуктивности катушки от времени:

$$L = L_0 + \frac{U_0 Rt}{\mathscr{E} - U_0}.$$

Задача 5. *На двух длинных, гладких, параллельных, горизонтальных и проводящих штангах лежит проводящая перемычка П массой M (рис.6). Расстояние между штангами l. Через резистор сопротивлением R и разомкнутый ключ K к штангам подключена батарея с постоянной ЭДС. Штанги расположены в области однородного магнитного поля с индукцией, равной B и направленной от нас перпендикулярно плоскости рисунка. После замыкания ключа в установившемся режиме перемычка достигает скорости v_0. Пренебрегая внутренним сопротивлением батареи и сопротивлением штанг и перемычки, определите ускорение перемычки сразу после замыкания ключа. (1997 г.)*

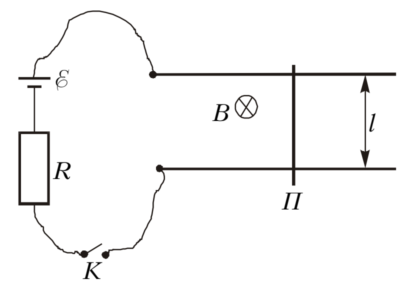

Рис. 6

Сначала найдем ЭДС батареи $\mathscr{E}$. Это можно сделать, зная величину установившейся скорости перемычки.

Рассмотрим произвольный момент времени после замыкания ключа. По перемычке течет ток I и со стороны магнитного поля на нее действует сила Ампера, равная $F = BIl$ и направленная вправо. Выберем неподвижную систему координат, в которой будем рассматривать движение перемычки (рис.7). Перемычка движется вдоль оси x. Уравнение движения имеет вид

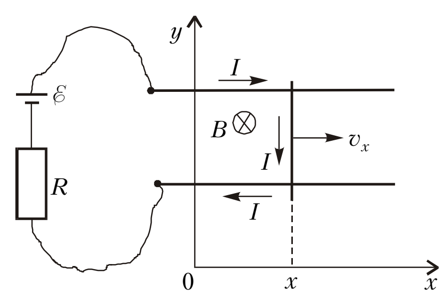

Рис. 7

$$Ma = F,\ \text{или}\ Mv_x' = BIl.$$

Запишем теперь закон Ома для замкнутого контура:

$$\mathscr{E} - Blv_x = IR.$$

Подставляя выражение для тока из этого равенства в предыдущее, получим

$$Mv_x' = \frac{(\mathscr{E} - Blv_x)}{R}Bl,$$

или, после арифметических преобразований,

$$v_x' + \frac{(Bl)^2}{MR}v_x = \frac{\mathscr{E}Bl}{MR}.$$

Это уравнение описывает зависимость скорости v_x перемыч-

(Продолжение см. на с. 34)

(Начало см. на с. 30)

ки от времени. Очевидно, что скорость перемычки достигнет постоянного значения, когда ускорение станет равным нулю. Итак, при $v_x' = 0$ $v_x = v_0$ и, следовательно,

$$\mathcal{E} = Blv_0 .$$

Теперь мы можем ответить на поставленный в задаче вопрос. Сразу после замыкания ключа в цепи течет ток

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Blv_0}{R} .$$

На перемычку действует сила Ампера, равная

$$F_1 = BI_1l = \frac{(Bl)^2 v_0}{R} .$$

Поэтому ускорение перемычки в начальный момент равно

$$a_1 = \frac{F_1}{M} = \frac{(Bl)^2 v_0}{MR} .$$

Задача 6. *Если рассматривать свое изображение в плоскопараллельной стеклянной пластинке толщиной H = 10 см, то можно увидеть ряд последовательных изображений лица, отстоящих друг от друга на L = 14 см. Чему равен показатель преломления стекла пластинки? (1999 г.)*

Пусть точка A является объектом, принадлежащим нашему лицу. Проведем произвольно луч света от точки A под малым углом падения α на верхнюю поверхность пластинки (рис.8). Луч частично отразится в точке B (луч *1*), частично испытает преломление под углом β, а затем, частично отразившись от нижней поверхности пластинки в точке F, снова направится к верхней поверхности пластинки. Здесь он, частично отразившись в точке D, выходит в виде преломленного луча (луч *2*). Таким образом будут происходить многократные отражения и преломления.

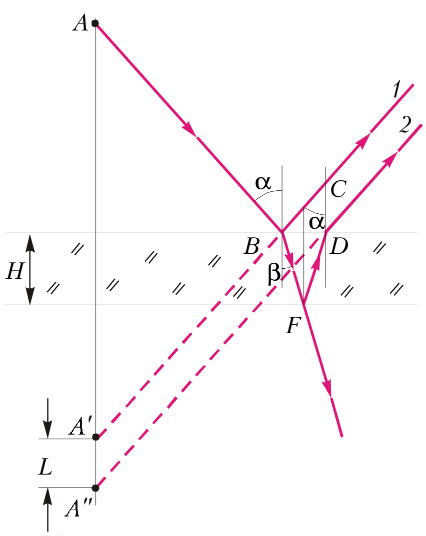

Рис. 8

Продолжения лучей *1* и *2* дают два первых мнимых изображения точки A – точки A' и A'', отстоящие друг от друга на L. Очевидно, что и все последующие мнимые изображения точки A тоже будут располагаться на одинаковых расстояниях L друг от друга.

Из треугольника BFD найдем длину отрезка BD:

$$BD = 2H \operatorname{tg} \beta ,$$

а из треугольника BCD найдем расстояние L между изображениями, равное длине отрезка CD:

$$L = CD = BD \operatorname{ctg} \alpha = 2H \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \approx 2H \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{2H}{n} .$$

Отсюда получаем

$$n = \frac{2H}{L} = 1{,}43 .$$

Задача 7. *Маленький грузик массой m на пружине жесткостью k (рис.9) совершает гармонические колебания относительно главной оптической оси тонкой плосковогнутой линзы с фокусным расстоянием −F (F > 0). Линза плотно прижата к вертикально расположенному плоскому зеркалу. Расстояние L = 4,5F. 1) На каком расстоянии от зеркала находится изображение грузика в данной оптической системе? 2) С какой скоростью изображение грузика в системе линза – зеркало пересекает главную оптическую ось линзы, если амплитуда колебаний груза равна A? (1998 г.)*

1) На рисунке 9 изображен ход лучей, когда груз – точка B – находится на максимальном расстоянии A от главной оптической оси системы $O'O''$. Изображение грузика после

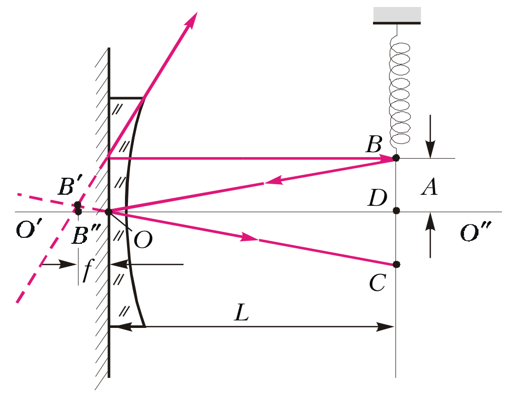

Рис. 9

двойного прохождения лучами линзы и зеркального отражения от плоского зеркала получается в точке B' на расстоянии f от оптического центра системы. Из формулы линзы

$$\frac{1}{L} + \frac{1}{f} = -\frac{2}{F} ,$$

где двойка в правой части означает двойное прохождение лучами линзы, найдем

$$f = -\frac{LF}{2L + F} = -0{,}45F .$$

Знак «минус» говорит о том, что изображение мнимое.

2) На нашем рисунке расстояние от грузика до главной оптической оси равно A, а расстояние от изображения (точка B') до оси равно $B'B''$ (точка $B'' \in O'O''$). Из подобия треугольников $B'OB''$ и DOC (O – оптический центр линзы) следует, что

$$\frac{A}{B'B''} = \frac{L}{f} = \frac{2L + F}{F} .$$

Это соотношение для расстояний до оси грузика и его изображения, очевидно, справедливо и для произвольного момента, когда расстояние грузика до оси равно $A \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\, t$, где $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$ – циклическая частота колебаний. Расстояние от изображения до оси обозначим через y ($y = B'B''$). Тогда получим

$$\frac{A \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\, t}{y} = \frac{2L + F}{F} = 10 , \text{ и } y = \frac{A \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\, t}{10} .$$

Продифференцируем это выражение по времени:

$$y' = -\frac{A\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}}\, t}{10} .$$

Грузик будет пересекать главную оптическую ось в те моменты, когда

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\,t = \frac{\pi}{2} + \pi N = \frac{(2N+1)\pi}{2}, \text{ где } N = 0,\ 1,\ 2\ldots$$

В эти моменты

$$\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t_N = (-1)^N,$$

и скорость пересечения изображением главной оптической оси равна

$$y'_N = v_N = (-1)^{N+1}\frac{A\sqrt{\frac{k}{m}}}{10} = (-0{,}1)^{N+1}A\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Отрицательный знак означает, что скорость шарика направлена вниз.

Упражнения

1. Человек массой m, упираясь ногами в ящик массой M, подтягивает его с помощью каната, перекинутого через блок, по наклонной плоскости с углом наклона α (рис.10). С какой минимальной силой надо тянуть канат человеку, чтобы подтянуть ящик к блоку? Коэффициент трения скольжения между ящиком и наклонной плоскостью μ. Части каната, не соприкасающиеся с блоком, параллельны наклонной плоскости. Массой блока и каната пренебречь. (1998 г.)

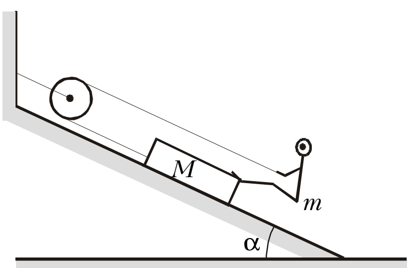

Рис. 10

2. Найдите массу кислорода, содержащегося в атмосфере Земли. Известно, что температура воздуха вблизи поверхности Земли T = 290 К, радиус Земли $R_З = 6370$ км, а ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2. Масса кислорода, содержащегося в одном литре воздуха, взятого у поверхности Земли, равна $\rho = 0{,}26$ г/л. Процентное содержание кислорода (по массе) в атмосфере Земли считать постоянным. Толщина атмосферы много меньше радиуса планеты. (1997 г.)

3. Проволочный контур в виде квадрата со стороной a и общим омическим сопротивлением R расположен на горизонтальной поверхности стола (рис. 11). Часть контура находится в однородном магнитном поле с индукцией, равной B_0 и перпендикулярной плоскости контура. Контур неподвижен и входит в область однородного поля на глубину b. После выключения магнитного поля контур приобретает некоторый импульс. Определите величину и направление этого импульса, полагая, что за время спадания магнитного поля смещение контура пренебрежимо мало. Самоиндукцией контура пренебречь. (1999 г.)

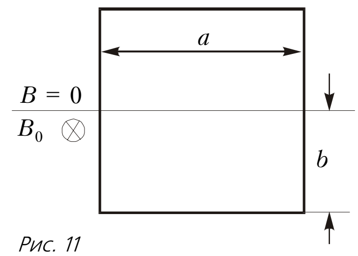

Рис. 11

4. С помощью собирающей линзы с фокусным расстоянием F на экране, расположенном на расстоянии $L = 4{,}9F$ от циферблата ручных часов, получено уменьшенное изображение секундной стрелки часов, длина которой R = 1,5 см. Главная оптическая ось линзы перпендикулярна экрану и плоскости циферблата и проходит через ось вращения секундной стрелки. Чему равна линейная скорость перемещения конца изображения стрелки на экране? (1997 г.)