№ 1, 2002 г. / Практикум абитуриента

В. Плис

КИНЕМАТИКА И ВЕКТОРЫ

Кинематика и векторы

В.ПЛИС

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Обсудим основные методы работы с векторными соотношениями в кинематике материальной точки и проиллюстрируем их на примерах равномерного и равнопеременного движений.

Равномерное движение

Известно, что при равномерном движении скорость $\vec{v}$ материальной точки остается постоянной и равной начальной скорости $\vec{v}_0$, а перемещение

$$\vec{s}(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t$$

за время от 0 до t сонаправлено с вектором $\vec{v}_0$ и пропорционально ему по величине (здесь $\vec{r}$ – радиус-вектор материальной точки).

Задача 1. *Сверхзвуковой самолет летит горизонтально. Два микрофона, находящихся на одной вертикали на расстоянии d друг от друга, зарегистрировали приход звука от самолета с запаздыванием по времени, равным τ. Найдите величину v скорости самолета. Скорость звука в воздухе c.*

Обратимся к рисунку 1, иллюстрирующему последовательные перемещения сверхзвукового самолета (источника звука) и фронта звуковой волны (огибающей вторичных волн). Пусть при пролете самолета через точку A в атмосфере возбуждается звуковая волна, и через некоторое время t волновое возмущение достигает первого микрофона M_1. В этот момент времени самолет находится в точке B_1, и прямая B_1M_1 определяет положение волнового фронта. За последующий промежуток времени τ самолет перемещается в точку B_2, а волновой фронт, двигаясь со скоростью $\vec{c}$, перемещается в положение B_2EM_2. Проанализировав кинематику перемещений самолета и волнового фронта, находим:

из прямоугольного треугольника AB_1M_1

$$\sin\alpha = \frac{AM_1}{AB_1} = \frac{ct}{vt} = \frac{c}{v},$$

из прямоугольного треугольника M_1M_2E

$$\cos\alpha = \frac{c\tau}{d}.$$

Исключая α из полученных соотношений, получаем

$$v = c\sqrt{1 - \frac{(c\tau)^2}{d^2}}.$$

Задача 2. *Две частицы 1 и 2 движутся с постоянными скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, их радиусы-векторы в начальный момент времени равны $\vec{r}_{01}$ и $\vec{r}_{02}$ соответственно. При каком соотношении между этими четырьмя векторами частицы испытают столкновение друг с другом?*

По условию, частицы в лабораторной системе отсчета движутся равномерно, их радиусы-векторы зависят от времени по законам

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_{01} + \vec{v}_1 t, \quad \vec{r}_2(t) = \vec{r}_{02} + \vec{v}_2 t.$$

Перейдем в систему отсчета, связанную с первым телом и движущуюся поступательно относительно лаборатории. В этой системе положение точки *2* в любой момент времени определяется вектором

$$\vec{r}\,'(t)=\vec{r}_2(t)-\vec{r}_1(t)=\left(\vec{r}_{02}-\vec{r}_{01}\right)+\left(\vec{v}_2-\vec{v}_1\right)t. \qquad (*)$$

Отсюда следует, что в подвижной системе отсчета точка *2* движется по прямой, проходящей через начальное положение точки, определяемое равенством $\vec{r}\,'_0=\vec{r}_{02}-\vec{r}_{01}$, а направляющим вектором прямой является относительная скорость $\vec{v}\,'=\vec{v}_2-\vec{v}_1$. Рисунок 2 наглядно иллюстрирует приведенные соотношения.

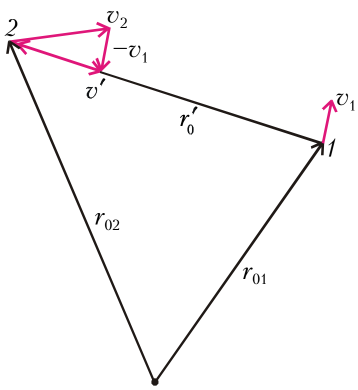

Рис. 2

При произвольных абсолютных скоростях $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ соотношение $(*)$ описывает пучок прямых, проходящих через начальную точку. И только одна из этих прямых проходит через начало отсчета подвижной системы. Это происходит в том случае, когда векторы $\vec{r}\,'_0$ и $\vec{v}\,'$ антипараллельны, т.е. соответствующие единичные векторы имеют противоположные знаки:

$$\frac{\vec{r}_{02}-\vec{r}_{01}}{\left|\vec{r}_{02}-\vec{r}_{01}\right|}=\frac{\vec{v}_1-\vec{v}_2}{\left|\vec{v}_1-\vec{v}_2\right|}.$$

Равнопеременное движение

Как известно, в этом случае зависимости скорости и перемещения от времени имеют вид

$$\vec{v}(t)=\vec{v}_0+\vec{a}\,t,$$

$$\vec{s}(t)=\vec{r}(t)-\vec{r}_0=\vec{v}_0\,t+\frac{\vec{a}\,t^2}{2},$$

где $\vec{a}=\text{const}$ – ускорение.

Среди всевозможных случаев равнопеременного движения особое место занимает движение под действием гравитационных сил – свободное падение тел в однородном поле тяжести с постоянным ускорением $\vec{a}=\vec{g}$. Зависимость вектора скорости от времени при свободном падении иллюстрирует рисунок 3. Из соотношения для перемещения следует, что при свободном падении вектор перемещения материальной точки за время от 0 до t равен сумме векторов $\vec{v}_0\,t$ и $\dfrac{\vec{g}\,t^2}{2}$ (рис.4). Это означает, в частности, что движение тела, брошенного под углом к горизонту, есть суперпозиция равномерного прямолинейного движения со скоростью $\vec{v}_0$ и свободного падения в однородном поле тяжести с нулевой начальной скоростью.

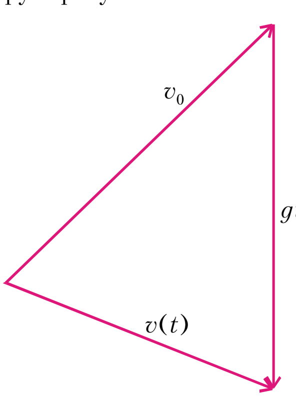

Рис. 3

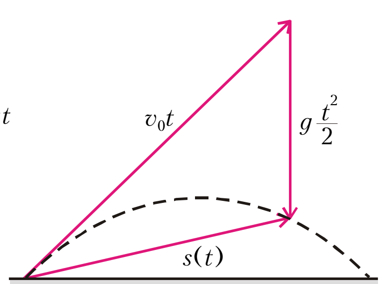

Рис. 4

Задача 3. *Мышонок стреляет из рогатки “точно” в кота, сидящего на ветке дерева. (Вектор начальной скорости камня направлен на кота). Через t = 1 с камень падает на землю в точку, находящуюся на одной вертикали с котом. На какой высоте H находился кот? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.*

Перемещение камня за время полета t равно

$$\vec{r}(t)=\vec{v}_0\,t+\frac{\vec{g}\,t^2}{2}$$

(считаем $\vec{r}_0=\vec{0}$). Изобразим эти векторы на рисунке 5. Отсюда получаем

$$H=\frac{gt^2}{2}=5\ \text{м}.$$

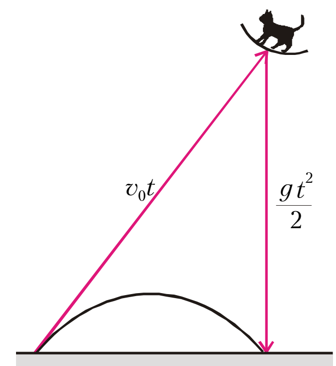

Рис. 5

Если бы гравитационные силы не действовали на камень, то через t = 1 с он действительно попал бы в кота.

Заметим, что перемещение камня, брошенного под углом к горизонту, можно представить также в виде полусуммы начальной $\vec{v}_0$ и конечной $\vec{v}(t)$ скоростей, умноженной на время t:

$$\vec{s}(t)=\vec{r}(t)-\vec{r}_0=\vec{v}_0\,t+\frac{\vec{g}\,t^2}{2}=\frac{\vec{v}_0+\vec{v}_0+\vec{g}\,t}{2}t=\frac{\vec{v}_0+\vec{v}(t)}{2}t.$$

Задача 4. *Мышонок стреляет из рогатки в кота, сидящего на ветке дерева. Через t = 1 с камень попадает в ветку прямо у лап кота. На каком расстоянии s от мышонка находился кот, если известно, что векторы $\vec{v}_0$ и $\vec{v}(t)$ взаимно перпендикулярны? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.*

Искомое расстояние есть абсолютная величина (модуль) вектора перемещения камня за время полета t:

$$s=\left|\vec{s}(t)\right|=\frac{\left|\vec{v}_0+\vec{v}(t)\right|}{2}t.$$

В момент времени t вектор скорости $\vec{v}(t)$ перпендикулярен вектору $\vec{v}_0$ и равен $\vec{v}(t)=\vec{v}_0+\vec{g}\,t$ (рис.6). Диагонали изображенного на рисунке 6 прямоугольника равны

$$\left|\vec{v}_0+\vec{v}(t)\right|=\left|\vec{v}(t)-\vec{v}_0\right|=\left|\vec{g}\,t\right|=gt.$$

Тогда искомое расстояние будет равно

$$s=\frac{gt^2}{2}\approx 5\ \text{м}.$$

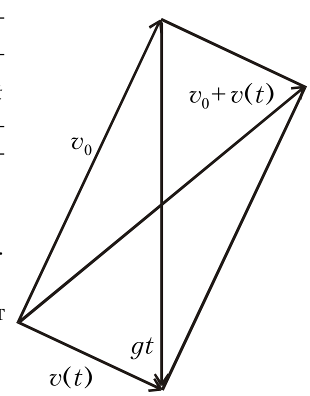

Рис. 6

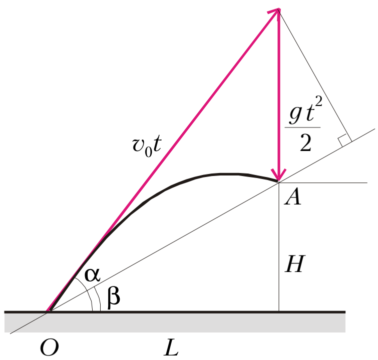

Рис. 7

Задача 5. *На крышу дома высотой H с расстояния L от него мальчик хочет забросить мяч. При какой минимальной величине начальной скорости $v_{0\min}$ это возможно? Под каким углом α_* следует в этом случае бросить мяч? Ускорение свободного падения равно g. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.*

Через точки старта и окончания полета (рис.7) проведем прямую OA, которая образует угол β с горизонтальной прямой. Перемещение мяча за время полета t равно

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$$

(считаем $\vec{r}_0 = \vec{0}$). Как видим, проекции векторов $\vec{v}_0 t$ и $\vec{g}t^2/2$ на направление нормали к прямой OA равны:

$$v_0 t \sin(\alpha - \beta) = \frac{gt^2}{2}\cos\beta,$$

откуда находим продолжительность полета мяча:

$$t = \frac{2v_0}{g}\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta}.$$

Далее, из рисунка 7 следует, что алгебраическая сумма проекций векторов $\vec{v}_0 t$ и $\vec{g}t^2/2$ на прямую OA равна расстоянию от точки старта до точки окончания полета:

$$\sqrt{H^2+L^2} = v_0 t\cos(\alpha-\beta) - \frac{gt^2}{2}\sin\beta.$$

С учетом выражения для времени полета последнее соотношение перепишем в виде

$$\sqrt{H^2+L^2} = \frac{v_0^2}{g\cos^2\beta}\left(\sin(2\alpha-\beta) - \sin\beta\right).$$

Наименьшему значению начальной скорости соответствует угол бросания α_* такой, при котором множитель в скобках в последнем соотношении принимает наибольшее значение:

$$\sin(2\alpha_* - \beta) = 1,\ 2\alpha_* - \beta = \frac{\pi}{2},\ \alpha_* = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}.$$

Тогда

$$v_{0\min}^2 = g\sqrt{H^2+L^2}\,\frac{\cos^2\beta}{1-\sin\beta}.$$

С учетом равенства $\operatorname{tg}\beta = H/L$ получаем

$$v_{0\min}^2 = g\left(\sqrt{H^2+L^2} + H\right),$$

и окончательно

$$v_{0\min} = \sqrt{g\left(\sqrt{H^2+L^2}+H\right)}.$$

Задача 6. *Из точек A и B, находящихся на одной горизонтальной прямой, одновременно бросили два камня с одинаковыми по модулю скоростями $v_0 = 20$ м/с. Один из камней полетел по навесной траектории, другой – по настильной, но каждый попал в точку старта другого камня. Известно, что в точке A угол бросания $\alpha = 75°$. Через какое время τ после старта расстояние между камнями станет минимальным? Чему равно это расстояние?*

Рассмотрим полет камня, брошенного из точки A. Повторяя построения, выполненные в начале решения предыдущей задачи (с учетом того, что точки начала и окончания полета лежат на одной горизонтальной прямой), находим продолжительность полета:

$$t = \frac{2v_0}{g}\sin\alpha$$

и расстояние между точками A и B:

$$L = v_0 t\cos\alpha = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha.$$

Аналогично, для камня, брошенного из точки B:

$$L = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\beta.$$

Сравнивая выражения для L, получаем

$$\sin 2\alpha = \sin 2\beta,$$

или, поскольку по условию $2\alpha + 2\beta = \pi$,

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Далее, выберем в качестве тела отсчета камень, вылетевший из точки A, и свяжем с ним систему отсчета, движущуюся поступательно относительно лаборатории. Скорость второго камня в этой системе $\vec{u}$ найдем из правила сложения скоростей:

$$\vec{u} = \vec{v}_2(t) - \vec{v}_1(t) = \left(\vec{v}_{02} + \vec{g}t\right) - \left(\vec{v}_{01} + \vec{g}t\right) = \vec{v}_{02} - \vec{v}_{01},$$

т.е. в подвижной системе второй камень движется равномерно и прямолинейно со скоростью

$$\vec{u} = \vec{v}_{02} - \vec{v}_{01},$$

равной начальной относительной скорости. Так как $\vec{v}_{02} \perp \vec{v}_{01}$ и $v_{01} = v_{02} = v_0$, вектор $\vec{u}$ есть диагональ квадрата, построенного на векторах $\vec{v}_{02}$ и $-\vec{v}_{01}$, поэтому $u = \sqrt{2}v_0$.

Рис. 8

Обратимся к рисунку 8, иллюстрирующему относительное движение. Из рисунка находим кратчайшее расстояние между камнями – длину катета AC в прямоугольном треугольнике ACB, где угол при вершине B равен $\delta = \alpha - 45° = 30°$:

$$AC = L\sin\delta = \frac{L}{2} = 10 \text{ м}.$$

Максимальное сближение камней произойдет в момент времени

$$\tau = \frac{AC}{u\operatorname{tg}\delta} \approx 0{,}6 \text{ с}.$$

Задача 7. *С горизонтальной поверхности земли бросили мяч, и он упал на землю со скоростью $v = 9{,}8$ м/с под углом $\beta = 30°$ к горизонту. Величина вертикальной составляющей скорости в точке бросания на 20% больше, чем в точке падения. Найдите продолжительность t полета. Считайте силу сопротивления пропорциональной скорости мяча:*

$\vec{F}_c = -k\vec{v}$ $(k > 0)$. *Ускорение свободного падения* $g = 9{,}8$ *м/с*^{2}.

Ускорение мяча в любой момент времени определяется силой тяжести и силой сопротивления:

$$\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \vec{g} - \frac{k}{m}\vec{v},$$

где m – масса мяча. Найдем приращение скорости мяча за любой элементарный промежуток времени Δt:

$$\Delta\vec{v} = \left(\vec{g} - \frac{k}{m}\vec{v}\right)\Delta t$$

и за время полета t:

$$\vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \sum\left(\vec{g} - \frac{k}{m}\vec{v}\right)\Delta t = \vec{g}\,t - \frac{k}{m}\sum\vec{v}\,\Delta t = \vec{g}\,t - \frac{k}{m}\vec{s}(t).$$

По условию, перемещение мяча $\vec{s}(t) = \sum\vec{v}\,\Delta t$ за время полета – это горизонтальный вектор. Переходя в полученном соотношении к проекциям векторов на вертикальную ось, получаем

$$t = \frac{2{,}2v\sin\beta}{g} = 1{,}1 \text{ с}.$$

В заключение отметим, что кинематические соображения позволяют решать не только задачи физики. Например, при решении геометрических задач бывает полезно представить себе, чтó будет происходить с элементами рассматриваемой фигуры, если некоторые ее точки начнут двигаться.

Задача 8. *Некто узнал, что в местности, где зарыт клад, растут три дерева: дуб, сосна и береза. Для того чтобы найти клад, следует стать под березой (точка Б на рисунке 9) лицом к прямой, проходящей через дуб (точка Д) и сосну (точка С), при этом дуб должен оказаться справа, а сосна слева. Затем следует пойти к дубу, считая шаги. Дойдя до дуба, повернуть под прямым углом направо и пройти столько же шагов, сколько было пройдено от березы до дуба. В этом месте остановиться и поставить вешку (точка B_1). Затем следует вернуться к березе и пойти к сосне, считая шаги. Дойдя до сосны, повернуть под прямы углом налево, и пройти столько же шагов, сколько было пройдено от березы до сосны. В этом месте остановиться и поставить вешку (точка B_2). Клад зарыт точно посередине между вешками (точка K).*

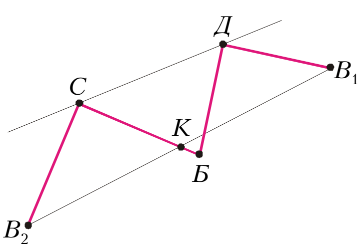

Рис. 9

При такой подробной инструкции отыскание клада не могло вызвать затруднений. Однако они все-таки возникли. Дело в том, что когда кладоискатель попал в указанную местность, он обнаружил там только дуб и сосну. Березы же не было и в помине. И все же он нашел клад. Как ему это удалось сделать?

Представим себе, что точка $Б$ начала двигаться, и пусть $\vec{v}$ – вектор ее мгновенной скорости. Так как длины отрезков $ДB_1$ и $ДБ$ равны и отрезок $ДB_1$ получается из отрезка $ДБ$ поворотом на угол $\pi/2$, то точка B_1 будет двигаться согласованно с точкой $Б$, а именно так, что вектор $\vec{v}_1$ ее скорости будет получаться из вектора $\vec{v}$ поворотом на угол $\pi/2$. Аналогично, вектор $\vec{v}_2$ скорости точки B_2 будет получаться из $\vec{v}$ поворотом на угол $-\pi/2$. Поэтому $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$. Следовательно, при произвольном движении точки $Б$ скорость точки K

$$\vec{v}_K = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}$$

всегда равна нулю: точка K неподвижна, и ее положение не зависит от положения точки $Б$! Чтобы найти теперь положение точки K, достаточно выбрать одно любое положение точки $Б$. Например, совместить точку $Б$ с точкой C и применить построение, известное кладоискателю .

Упражнения

1. Самолет, летящий горизонтально на постоянной высоте с постоянной скоростью v, большей скорости звука c, в некоторый момент времени пролетает над наблюдателем. Какой угол α с вертикалью составляет направление на самолет, определяемое по звуку в тот момент, когда истинное (видимое) направление от наблюдателя на самолет составляет с вертикалью угол φ?

2. Стрелок и мишень находятся в диаметрально противоположных точках карусели радиусом $R = 5$ м, равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси. Период вращения карусели $T = 10$ с. Под каким углом α к диаметру карусели должен целиться стрелок, чтобы поразить мишень? Скорость пули $v = 300$ м/с.

3. По пересекающимся под углом α прямым дорогам едут с постоянными скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ две машины. Когда первая машина проезжает перекресток, вторая находится на расстоянии L от перекрестка и приближается к нему. Определите наименьшее расстояние $L_{\min}$ между машинами при дальнейшем движении. Через какое время τ расстояние между машинами будет наименьшим?

4. Гимнаст в цирке прыгает с подкидного трамплина и через $t = 1{,}2$ с приземляется на расстоянии $L = 6$ м от трамплина. Точка приземления и трамплин расположены на одной горизонтальной прямой. Определите величину v_0 начальной скорости и угол α наклона вектора $\vec{v}_0$ к горизонтальной плоскости. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

5. Найдите максимальную высоту ограды $H_{\max}$, через которую вы могли бы перекинуть снежок, находясь на расстоянии $l = 20$ м от нее. В расчетах используйте свои рекордные возможности по метанию снежков на дальность. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

6. Два жонглера, стоящие на горизонтальной площадке на расстоянии L друг от друга, перекидываются мячами, бросая их одновременно. С какой по величине скоростью v_{02} и под каким углом β к горизонту был брошен второй мяч, если он попал в первый, когда тот достиг максимальной высоты? Первый жонглер бросил мяч с начальной скоростью v_{01} под углом α к горизонту. Ускорение свободного падения равно g. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

7. За время полета мяча, брошенного мальчиком под углом к горизонту, горизонтальная составляющая скорости мяча уменьшилась на 12%, и он упал на землю на расстоянии $s_1 = 14$ м. Когда мяч был брошен под тем же углом к горизонту со скоростью на 20% больше, чем в первом случае, горизонтальная составляющая скорости мяча уменьшилась на 15%. На каком расстоянии s_2 от мальчика упал мяч в этом случае? Считайте силу сопротивления пропорциональной скорости мяча: $\vec{F}_c = -k\vec{v}$ $(k > 0)$. Опыты проводятся на горизонтальной поверхности.