№ 1, 2002 г. / Варианты

ЗАДАЧИ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ В МГУ им. М.В. ЛОМОНОСОВА (2001 год)

Материалы вступительных экзаменов 2001 года

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет, олимпиада «Абитуриент-2001», март)

1. Решите уравнение

$$3x-2|x-2| = 3\sqrt{3x+18} - 2\left|\sqrt{3x+18}-2\right|.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{\log_{\left(21+4x-x^2\right)}(7-x)}{\log_{(x+3)}\left(21+4x-x^2\right)} < \frac{1}{4}.$$

3. В трапеции $ABCD$ с боковой стороной $CD = 30$ диагонали пересекаются в точке E, а углы AED и BCD равны. Окружность радиуса 17, проходящая через точки C, D и E, пересекает основание AD в точке F и касается прямой BF. Найдите высоту трапеции и ее основания.

4. Можно ли подобрать числа A, B, φ, ψ так, чтобы выражение

$$\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+2\right)^2 + A\cos(x+\varphi) + B\sin(2x+\psi)$$

принимало при всех x одно и то же значение C? Если да, то какие значения может принимать константа C?

5. Основанием прямой призмы $ABCA'B'C'$ с высотой $\frac{4}{7}$ служит треугольник ABC, в котором $AB = BC = 1$ и $AC = \frac{3}{7}$. Через точку пересечения диагоналей грани $ACC'A'$ на расстоянии $\frac{4}{13}$ от точки A проводится плоскость, делящая объем призмы пополам. Какова наибольшая площадь сечения призмы такой плоскостью?

6. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} (a-1)x^2 + 2ax + a + 4 \le 0, \\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 \ge 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Вариант 2

(механико-математический факультет, июль)

1. Решите неравенство

$$x \ge \log_2\left(101\cdot 10^x - 10^{2+2x}\right) - \log_5\left(101\cdot 2^x - 5^{2+x}\cdot 2^{2+2x}\right).$$

2. Имеет ли уравнение

$$12\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = |4-5\cos x|$$

хотя бы одну пару корней, расстояние между которыми не превосходит $\frac{\pi}{2}$?

3. Через вершины A, B, C параллелограмма $ABCD$ со сторонами $AB = 3$ и $BC = 5$ проведена окружность, пересекающая прямую BD в точке E, причем $BE = 9$. Найдите диагональ BD.

4. Найдите все трехзначные натуральные числа, каждое из которых больше суммы квадратов своих цифр на 517.

5. Найдите все числа, которые не могут быть корнями уравнения

$$4\sqrt{2x^4+x^3} = a\sqrt[4]{4-a^4}\left(x+4x^2-8\right)$$

ни при каком значении параметра a.

6. Основание $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ повернули в плоскости ABC на угол 30° вокруг точки пересечения диагоналей AC и BD (вершина A повернулась в направлении вершины D), а боковые грани заменили гранями $AA'B$, $A'B'B$, $BB'C$, $B'C'C$, $CC'D$, $C'D'D$, $DD'A$ и $D'A'A$. Найдите все значения, которые могут принимать периметр и площадь сечения полученного многогранника плоскостью, параллельной плоскости ABC, если периметр прямоугольника $ABCD$ равен 26, а его площадь равна 42.

Вариант 3

(факультет вычислительной математики и кибернетики, олимпиада «Абитуриент-2001», апрель)

1. Сумма первых трех членов арифметической прогрессии равна 27, а сумма первых пяти членов равна 80. Сумма какого числа первых членов прогрессии равна 486?

2. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3\sin x + \cos y = 0, \\ 6\cos x - 2\sin y = 7. \end{cases}$$

3. Из пункта A в пункт B выехал первый велосипедист. Одновременно с ним с такой же скоростью из B в A выехал второй велосипедист. Через некоторое время первый велосипедист увеличил скорость на 10 км/ч. Если бы первый велосипедист сразу двигался с увеличенной скоростью, то его встреча со вторым велосипедистом состоялась бы на три часа раньше. Известно, что расстояние между A и B равно 180 км, в момент изменения скорости первым велосипедистом расстояние между ними и вторым велосипедистом было меньше 70 км, на весь путь из A в B первый велосипедист затратил 15 ч. Найдите первоначальную скорость велосипедистов.

4. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, длина диагонали BD равна 12. Расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников AOD и COD, равно 16. Радиус окружности, описанной около треугольника AOB, равен 5. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

5. Для каждого значения параметра a решите неравенство

$$3a-1-(8a-5)3^{-2\sqrt{-\log_{81}\left(x^2+6x+9\right)}}\le 3(a+2)|x+3|^{2\sqrt{\log_{|x+3|}1/9}}.$$

6. Сфера касается всех боковых ребер правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, причем ребер SA и SB она касается в точках K и L соответственно. Точки K, L и S лежат по одну сторону от плоскости, которая касается сферы в точке M, принадлежащей грани SAB, и пересекает ребра SA и SB в точках G и H соответственно. Прямые KM и LM делят апофему грани SAB на три равных отрезка. Известно, что $AB = 9$ и $GH = 3\sqrt{11}$. Найдите объем пирамиды $SABCDEF$ и радиус сферы.

Вариант 4

(факультет вычислительной математики и кибернетики, июль)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}2\cdot 5^{1-y}=\log_3\left(x^{-2}\right),\\ 5^y+\log_3 x=4.\end{cases}$$

2. Сумма первых четырех членов арифметической прогрессии равна 56. Все члены этой прогрессии – натуральные числа. Двенадцатый член больше 67, но меньше 74. Найдите двадцатый член этой прогрессии.

3. Среди всех решений системы

$$\begin{cases}y+3x\le -3,\\ x^2+y^2+4x+2y\le 11\end{cases}$$

найдите такое, при котором выражение $x^2+y^2-6x-8y+25$ принимает минимальное значение.

4. Решите уравнение

$$\cos\left(\pi\left(x+7\sqrt{x}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(4x+\sqrt{x}\right)\right)=1.$$

5. Трапеция с основанием $\sqrt{8}$ и высотой $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ вписана в окружность радиуса $\sqrt{5}$. Каждый из четырех отсекаемых сторонами трапеции сегментов отражен внутрь трапеции симметрично относительно отсекающей его стороны. Найдите площадь фигуры, состоящей из тех точек трапеции, которые не принадлежат ни одному из отраженных внутрь нее сегментов.

6. Функция $f(x)$ определена, возрастает и отрицательна на всей числовой прямой. Решите неравенство

$$\left(2f\left(x^2-2x-112\right)+\left|f\left(x^2-2x-112\right)-3f\left(-2x\sqrt{32-2x}\right)\right|\right):$$

$$:\left(3f\left(-2x\sqrt{32-2x}-112\right)-2f\left(-2x\sqrt{32-2x}\right)\right)^7>0.$$

Вариант 5

(физический факультет, олимпиада «Абитуриент-2001», март)

1. Решите неравенство

$$\frac{2^x+5x-18}{x-2}\le 5.$$

2. Решите уравнение

$$2\sin 2x\cos\left(5x^2\right)-\sin\left(5x^2+2x\right)=0.$$

3. Решите уравнение

$$18^x-9^{x+1}-2^{x+2}+36=0.$$

4. В треугольнике ABC приведены медианы AN и CM, $\angle ABC = 120^\circ$. Окружность, проходящая через точки A, M и N, проходит также через точку C. Радиус этой окружности равен 7. Найдите площадь ΔABC.

5. Решите неравенство

$$\sqrt{2\log_9\left(3x^2-4\right)}>\log_3\sqrt{3x^2-4}.$$

6. В правильной треугольной пирамиде $SKLM$, все ребра которой равны $8a$, на ребре SK взята точка A так, что $SA : AK = 1 : 3$. Через точку A проведена плоскость, параллельная ребру SM и высоте KN ΔKLM. Найдите периметр сечения пирамиды этой плоскостью.

7. Для любого значения a решите неравенство

$$3(2x-a)+5a\sqrt{2x-a}-2a^2>0.$$

8. На стороне острого угла KOM взята точка L (L между O и K). Окружность проходит через точки K и L и касается луча OM в точке M. На дуге LM, не содержащей точки K, взята точка N. Расстояния от точки N до прямых OM, OK и KM равны m, k и l соответственно. Найдите расстояние от точки N до прямой LM.

Вариант 6

(физический факультет, июль)

1. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}(x+1)\operatorname{ctg}(2x+3)=1.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{3-x}}>\frac{1}{x-2}.$$

3. Решите уравнение

$$4^{3x^2+x}-8=2\cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}}.$$

4. В трапеции $KLMN$ известно, что $LM \parallel KN$, $\angle KLM = \frac{\pi}{2}$, $LM = l$, $KN = k$, $MN = a$. Окружность проходит через точки M и N и касается прямой KL в точке A. Найдите площадь ΔAMN.

5. Решите неравенство

$$\log_2\left(\log_3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)<\log_{\frac{1}{8}}\left(\log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}\right)\right).$$

6. В пирамиде $SABC$ $AB = 7$, $BC = 8$, $CA = 9$. Высоты боковых граней, проведенные из вершины S, являются касательными к сфере, вписанной в пирамиду. Радиус этой сферы равен $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Найдите объем пирамиды.

7. Для каждого значения a найдите все решения уравнения

$$\cos 2x+2\sin^2(x+a)+2-\sin a=0,$$

принадлежащие промежутку $\pi \le x \le 2\pi$.

8. В треугольнике ABC известен угол $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$. Прямая, параллельная стороне AC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. На отрезках AN и CM как на диаметрах построены окружности. Их общая хорда пересекает отрезок MN в точке D, $MD : DN = \sqrt{3}:1$. Найдите $\angle BCA$.

Вариант 7

(химический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{|x-1|} > \frac{1}{|x+1|}.$$

2. В равнобедренном треугольнике с основанием AC проведена биссектриса угла C, которая пересекает боковую сторону AB в точке D. Точка E лежит на основании AC так, что $DE \perp DC$. Найдите длину AD, если $CE = 2$.

3. Решите тригонометрическое уравнение

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x.$$

4. Решите уравнение

$$\sqrt{4x - x^2} + \sqrt{4x - x^2 - 3} = 3 + \sqrt{2x - x^2}.$$

5. Решите уравнение

$$|x-1| + |x+1| + |x-2| + |x+2| + \ldots$$
$$\ldots + |x-100| + |x+100| = 200x.$$

6. Найдите такие значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^3 - (a+3)x^2 + (3a+2)x - 2a \ge 0, \\ x^3 - (a+3)x^2 + 3ax \le 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

7. Функция $f(x)$ для всех x удовлетворяет уравнению

$$f(x+1) = f(x) + 2x + 1.$$

Найдите $f(2001)$, если $f(0) = 0$.

Вариант 8

(биологический факультет и факультет фундаментальной медицины)

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2 + 5x - 84}}{x - 7} \ge 0.$$

2. Решите уравнение

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin x = \frac{1}{2}.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{\log_2 x - 3}{6 \log_x 2 - 1} \le 2.$$

4. Из аэропорта одновременно вылетают два самолета и сразу набирают скорость и высоту. Они летят по замкнутым круговым маршрутам: первый – по окружности радиуса R, а второй – по окружности радиуса r. Предполагается, что самолеты летят безостановочно с одинаковыми постоянными скоростями, и каждый из них облетает свою окружность за целое число часов. Кроме того, не ранее чем через 43 часа и не позднее чем через 49 часов после вылета произошли следующие два события: первый самолет облетел свою окружность 4 раза, а второй облетел свою окружность 5 раз, и разрыв во времени между этими событиями составил не менее 2 часов. Найдите отношение $\dfrac{r}{R}$.

5. В треугольник ABC со сторонами $AB = 6$, $BC = 5$, $AC = 7$ вписан квадрат, две вершины которого лежат на стороне AC, одна на стороне AB и одна на стороне BC. Через середину D стороны AC и центр квадрата проведена прямая, которая пересекается с высотой BH треугольника ABC в точке M. Найдите площадь треугольника DMC.

6. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \sin x = \cos\left(\sqrt{6 - 2a^2}\, x\right), \\ \cos x = \left(a - \dfrac{2}{3}\right) \sin\left(\sqrt{6 - 2a^2}\, x\right) \end{cases}$$

имеет ровно одно решение на отрезке $[0; 2\pi]$.

Вариант 9

(факультет почвоведения)

1. Решите уравнение

$$2 + \cos 2x = 4\cos^2 x.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{5 - x^2} = 1 - x.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{x-2} x \le \log_{x-2} 4.$$

4. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны между собой, $AC = 2$, а $\angle ACB = 30°$. Из вершины A к боковой стороне BC проведены биссектриса AE и медиана AD. Найдите площадь треугольника ADE.

5. Решите неравенство

$$2\log_\pi(\sin x)\log_\pi(\sin 2x) - \log_\pi^2(\sin 2x) \le \log_\pi^2(\sin x).$$

6. Дано задание: на прямоугольном участке земли размером 1×4 м посадить три дерева, одно из которых должно быть в углу участка. Расстояние между любыми двумя деревьями не должно быть меньше 2,5 м. Можно ли выполнить это задание? Ответ обоснуйте.

Вариант 10

(геологический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{\dfrac{1}{x-1} - 1}{1 - \dfrac{1}{x-7}} \ge 0.$$

2. Найдите неотрицательные решения уравнения

$$1 + \sin 7x = \left(\cos\frac{3x}{2} - \sin\frac{3x}{2}\right)^2.$$

3. Решите уравнение

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{x-2} \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \frac{125}{343}.$$

4. Прямая, проходящая через вершину основания равнобедренного треугольника, делит его площадь пополам, а периметр треугольника делит на части длиной 5 и 7. Найдите площадь треугольника и укажите, где лежит центр описанной окружности: внутри или вне треугольника.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{2} + \dfrac{5}{2x+y-xy} = 5, \\ 2x + y + \dfrac{10}{xy} = 4 + xy. \end{cases}$$

6. Пункты A и B расположены на двух различных дорогах, представляющих собой две взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в пункте C. Два мотоциклиста одновременно начинают движение: первый из пункта A по направлению к C, а второй из B по направлению к C. Через какое время после начала движения расстояние между мотоциклистами будет наименьшим и каким, если скорость первого мотоциклиста равна 44 км/ч, второго – 33 км/ч, а расстояния от пункта A до пункта C и от пункта B до пункта C равны 275 км?

7. Сфера с диаметром $AD = \sqrt{3}$ касается плоскости треугольника ABC в точке A. Отрезки BD и CD пересекают сферу в точках M и N соответственно. Найдите длину отрезка MN, если $AB = 3$, $AC = 3\sqrt{5}$, а $\angle BDC = \dfrac{\pi}{3}$.

8. При каких значениях параметра $a \ge 1$ уравнение

$$\sin\left(\frac{4}{13}x\right)\operatorname{tg} x = 0$$

имеет ровно шесть различных корней на отрезке $\left[2a\pi; \left(a^2+1\right)\pi\right]$? Укажите эти корни.

Вариант 11

(географический факультет)

1. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{31}-\sqrt{21}}\left(x^2-9\right) \ge 0.$$

2. Решите уравнение

$$|\cos x| - \sqrt{3}\sin\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) = 1.$$

3. Числа a, b, c в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию, а числа $a-c$, $c-b$, $2a$ в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Какое минимальное значение может принимать число $2a^2 - 4b^2 - c^2 + 4bc + 6a$?

4. Стороны ромба $EFGH$ являются гипотенузами равнобедренных прямоугольных треугольников EAF, FDG, GCH, HBE, причем все эти треугольники имеют общие внутренние точки с ромбом $EFGH$. Сумма площадей четырехугольника $ABCD$ и ромба $EFGH$ равна 12. Найдите GH.

5. Решите уравнение:

$$4\arcsin\left(2^x - 7\right) - \arccos\left(5^x - 124\right) = \frac{6\pi}{x}.$$

6. При каких целых значениях параметра k система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y \le k^2 + 10k + 20, \\ 5x^2 + 5y^2 - 2kx + 4ky \le 5 - k^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Вариант 12

(филологический факультет)

1. Решите уравнение

$$3\cos 2x + 4\sin x = 1.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_{1/12}\left(2x^2-1\right)} > \frac{1}{\log_{1/4} x} + \frac{1}{\log_{1/3} x}.$$

3. В трапеции $ABCD$ стороны AB и CD параллельны и $CD = 2AB$. На сторонах AD и BC выбраны точки P и Q соответственно так, что $DP : PA = 2$, $BQ : QC = 3 : 4$. Найдите отношение площадей четырехугольников $ABQP$ и $CDPQ$.

4. Писатель-западник (З) и писатель-славянофил (С) опубликовали по одной книге. З употребляет букву «ф» в среднем на страницу текста на 75% чаще, чем С. Тираж книги писателя С на 5% больше, чем тираж книги писателя З. Количество страниц в книге у З на 10% меньше, чем количество страниц в книге у С. На сколько процентов в опубликованных текстах З букв «ф» больше или меньше, чем в текстах С?

5. При каких значениях параметра a на плоскости Oxy существует круг, содержащий все точки, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} 2y - x \le 1, \\ y + 2x \le 2, \\ y + ax \le -1? \end{cases}$$

Вариант 13

(экономический факультет, отделение экономики)

1. Решите неравенство

$$\left|x^2 - 8x + 15\right| \le \left|15 - x^2\right|.$$

2. Брокерская фирма приобрела два пакета акций, а затем продала их за общую сумму 7 миллионов 680 тысяч рублей, получив при этом 28% прибыли. За какую сумму фирма приобрела каждый из пакетов акций, если при продаже первого пакета прибыль составила 40%, а при продаже второго – 20%?

3. На координатной плоскости заданы точки $A(0; 2)$, $B(1; 7)$, $C(10; 7)$ и $D(7; 1)$. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$, где E – точка пересечения прямых AC и BD.

4. Решите неравенство

$$\log_2\left(2^x - 3\right)\log_{\sqrt{2}}\left(4^{x+2} - 12 \cdot 2^{x+3} + 144\right) < 32.$$

5. Решите уравнение

$$\sqrt{3}\cos\left(\pi\sqrt{x}\sqrt{\frac{6}{x} - x - 4}\right) + 3\sin\left(\pi x\sqrt{\frac{6}{x^2} - \frac{4}{x} - 1}\right) = \sqrt{12}.$$

6. Центры двенадцати шаров равных радиусов совпадают с серединами ребер правильной шестиугольной пирамиды. Найдите величину двугранного угла при ребре основания пирамиды, если известно, что шар, вписанный в пирамиду, касается всех двенадцати данных шаров.

7. Найдите наибольшие целочисленные значения u и v, для которых уравнение

$$364a^2u - 55v = -20020a^4$$

выполняется ровно при четырех различных значениях a, два из которых относятся как 3 : 5.

Вариант 14

(экономический факультет, отделение менеджмента)

1. Решите уравнение

$$\cos x + \cos 3x = \sqrt{3}\cos 2x.$$

2. Решите уравнение

$$\left|x^2-8x+15\right|=\left|15-x^2\right|.$$

3. Антикварный магазин приобрел два предмета, а затем продал их за общую сумму 39900 рублей, при этом прибыль составила 40%. За сколько магазин купил каждый предмет, если при продаже первого предмета прибыль составила 30%, а при продаже второго – 55%?

4. На координатной плоскости заданы точки $A(1;\,9)$, $C(5;\,8)$, $D(8;\,2)$ и $E(2;\,2)$. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$, где B – точка пересечения прямых EC и AD.

5. Решите неравенство

$$\log_3\left(3^x-1\right)\log_9\left(9^{x+2}-6\cdot 3^{x+3}+81\right)<3.$$

6. Решите уравнение

$$\sqrt{2}\sin\left(\pi\sqrt{x}\sqrt{\frac{5}{x}-x+6}\right)+\sqrt{6}\cos\left(\pi x\sqrt{\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x}-1}\right)=\sqrt{8}.$$

Вариант 15

(факультет психологии)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{8-x}=\sqrt{15}.$$

2. Решите неравенство

$$\log_2\log_{\frac{1}{2}}\frac{3x+4}{4x-8}\le 0.$$

3. Решите уравнение

$$3\sin^2 x-3\cos x-6\sin x+2\sin 2x+3=0.$$

4. В трапеции $BCDE$ основание $BE = 13$, основание $CD = 3$, $CE = 10$. На описанной около $BCDE$ окружности взята отличная от E точка A так, что $CA = 10$. Найдите длину отрезка BA и площадь пятиугольника $ABCDE$.

5. При каждом значении параметра a решите неравенство

$$ax^4+x^3+\left(2a+3a^3\right)x^2+2x+6a^3>0.$$

Вариант 16

(факультет социологии)

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{|x|}\ge 2.$$

2. Решите уравнение

$$\log_{\sin x}(3\sin x-\cos 2x)=0.$$

3. В городе N за последний год численность населения уменьшилась на 4%, а число безработных увеличилось на 5%. Сколько процентов от общего числа жителей составляют безработные, если год назад их было 8%?

4. Диагональ AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ является диаметром описанной около него окружности. Найдите отношение S_{ABC} и S_{ACD}, если известно, что диагональ BD делит AC в отношении 2 : 1 (считая от точки A), а $\angle BAC = 30^\circ$.

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых расстояние между корнями уравнения

$$ax^2+(2a+2)x+(a+3)=0$$

больше 1.

6. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{\frac{2+x}{x}}-\sqrt[3]{\frac{2-6x}{x}}=1.$$

Вариант 17

(Институт стран Азии и Африки)

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2x^2-5x-3}}{6+3\sqrt{3}x-2x^2}\ge 0.$$

2. Найдите все решения уравнения

$$5\sin^2 2x+8\cos^3 x=8\cos x,$$

удовлетворяющие условиям $\frac{3}{2}\pi\le x\le 2\pi$.

3. Из пункта A в пункт $Б$, расстояние между которыми равно 10 км, отправились в разное время пешеход, всадник и велосипедист. Известно, что их скорости постоянны и образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Первым из A вышел пешеход, которого в середине маршрута обогнал велосипедист, выехавший из A на 50 минут позже пешехода. В пункт $Б$ пешеход прибыл одновременно с всадником, выехавшим из A на 1 час 15 минут позже пешехода. Определите скорости участников маршрута.

4. Решите неравенство

$$\left(1+\log_3 x\right)\sqrt{\log_{3x}\sqrt[3]{\frac{x}{3}}}\le 2.$$

5. В треугольнике ABC даны длины сторон $AB=\sqrt{2}$, $BC=\sqrt{5}$ и $AC = 3$. Сравните величину угла BOC и 112,5°, если O – центр вписанной в треугольник ABC окружности.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}a(x+2)+y=3a,\\ a+2x^3=y^3+(a+2)x^3\end{cases}$$

имеет не более двух решений.

7. Решите уравнение

$$\frac{3\cos x+2\sin x}{\cos x}=\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}+$$

$$+\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\sqrt{3+2x-2y+2xy-x^2-y^2}.$$

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Гладкая доска, лежащая на цилиндре, может свободно вращаться вокруг проходящей через ее конец оси, прикрепленной к столу. Ось цилиндра и ось вращения доски параллельны. Определите угловую скорость вращения доски в тот момент, когда цилиндр катится по столу без проскальзывания с угловой скоростью ω, удаляясь от закрепленного конца доски, а доска образует со столом угол α (рис.1).

Рис. 1

2. На шероховатом горизонтальном дне бочки, заполненной водой, лежит диск толщиной $h = 4$ мм, изготовленный из материала с плотностью $\rho = 2{,}4$ г/см^3. Радиус диска $R = 15$ см. В бочку вертикально опустили тонкостенную трубку радиусом $r = 5$ мм, в которую вставлен поршень. Нижняя плоскость поршня совпадает с торцом трубки. Трубку плотно прижали к верхней плоскости диска так, что ее ось оказалась смещенной относительно оси диска на расстояние $b = 5{,}8$ мм. Затем поршень подняли вверх, зафиксировали и стали медленно поднимать трубку. На какой минимальной глубине будет находиться верхняя плоскость диска, когда он оторвется от трубки, если до момента отрыва вода не просачивалась в трубку? Атмосферное давление считать нормальным.

3. На гладкой невесомой нерастяжимой нити висит блок, к оси которого жестко прикреплен груз. Нить прикреплена к легким пружинам, другие концы которых закреплены на потолке так, что части нити, не лежащие на блоке, вертикальны и совпадают с осями пружин (рис.2). Жесткость первой пружины k_1, второй k_2. Масса блока с грузом M. При какой амплитуде вертикальные колебания груза могут быть гармоническими?

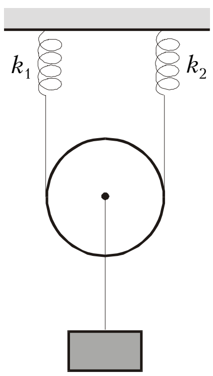

Рис. 2

4. В столе, равномерно вращающемся вокруг вертикальной оси, сделана сферическая ямка, центр которой лежит на оси вращения. В ямке движется небольшая гладкая шайба, периодически проходя через ее нижнюю точку и поднимаясь относительно этой точки на максимальную высоту, много меньшую радиуса R ямки. Двигаясь вверх, шайба в некоторый момент оказывается на высоте, в $k = 2$ раза меньшей максимальной. В следующий раз на этой же высоте шайба оказывается через n оборотов стола. Найдите период обращения стола.

5. В гладком вертикальном цилиндре под поршнем массой M содержится ν молей неона при температуре T_0. Площадь поперечного сечения цилиндра S, а поршень удерживают в таком положении, что газ занимает объем V. Затем поршень отпускают, и он после нескольких колебаний занимает определенное положение. Пренебрегая теплообменом неона с окружающими телами, найдите его температуру при новом равновесном положении поршня, зная, что неон все время находится в газообразном состоянии, а давление вне цилиндра равно нулю.

6. Зависимость от температуры молярной теплоемкости $c_\text{м}$ идеального одноатомного газа в цикле тепловой машины, который состоит из трех последовательных процессов *1–2*, *2–3*, *3–1*, изображена на рисунке 3, где R – универсальная газовая постоянная. Найдите отношение давлений газа при максимальной T_2 и минимальной T_1 температурах в этом цикле, если КПД машины равен η, количество газа в цикле неизменно и $T_2/T_1 = n$.

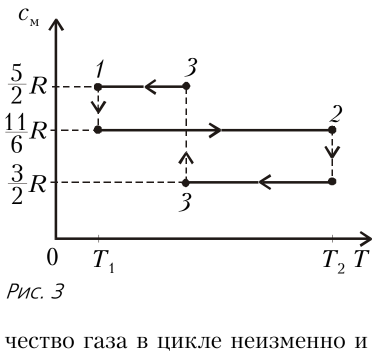

Рис. 3

7. Две проволоки, изготовленные из материала с малым температурным коэффициентом сопротивления, подключают к аккумулятору с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением один раз параллельно, а другой раз последовательно. При первом включении скорости дрейфа носителей заряда в проволоках оказались одинаковыми, а во втором случае скорость в первой проволоке уменьшилась в $k = 5$ раз по сравнению с предыдущим случаем. Найдите отношение диаметров проволок.

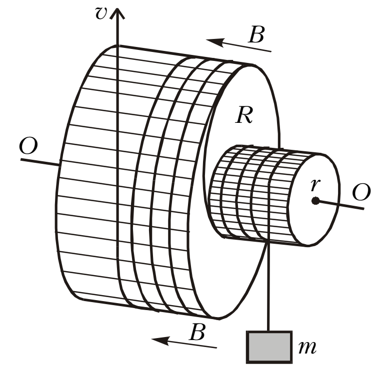

Рис. 4

8. На каркас, состоящий из двух коаксиальных цилиндров с радиусами r и R, вращающийся вокруг закрепленной горизонтальной оси OO, намотана изолированная тонкая проволока так, как показано на рисунке 4. К нижнему концу проволоки прикреплен груз, а ее верхний конец тянут с постоянной скоростью v вертикально вверх. Цилиндры находятся в однородном магнитном поле, индукция которого равна B и параллельна оси цилиндров. Найдите разность потенциалов между концами проволоки для моментов времени, когда на цилиндре радиусом R остается хотя бы часть проволоки.

9. На плоскую поверхность линзы, находящейся в воздухе, перпендикулярно этой поверхности падает узкий пучок света, параллельный главной оптической оси линзы. При этом на экране, расположенном за линзой, наблюдается светлое пятно, диаметр которого в k раз ($k > 1$) меньше диаметра падающего пучка. Найдите показатель преломления n стекла линзы, зная, что при погружении линзы с экраном (при неизменном расстоянии между ними) в жидкость с показателем преломления n_1 диаметр светлого пятна на экране не изменяется.

10. Излучение с длинами волн $\lambda_1 = 589{,}0$ нм и $\lambda_2 = 589{,}6$ нм от точечного источника падает на экран с двумя малыми отверстиями, расположенными симметрично относительно оси, проходящей через источник перпендикулярно плоскости экрана. На расстоянии $L = 0{,}7$ м за этим экраном расположен второй экран, параллельный первому. На втором экране на расстоянии $b = 5$ см от центра картины, там, где максимум, соответствующий одной длине волны, накладывается на минимум, соотвествующий другой, интерференционные полосы исчезают первый раз. Найдите расстояние d между отверстиями.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Лестница состоит из трех одинаковых гладких ступенек шириной $a = 30$ см и такой же высоты (рис.5). На верхней ступеньке расположена в плоскости рисунка невесомая пружина жесткостью $k = 30$ Н/м, правым концом прикрепленная к неподвижной стенке, а левым упирающаяся в лежащий на ступеньке маленький шарик массой $m = 100$ г. Шарик сдвигают вправо, сжимая пружину, после чего отпускают без начальной скорости. До какой максимальной величины Δl_max можно сжать пружину, чтобы выпущенный шарик по одному разу коснулся средней и нижней ступенек? Удар

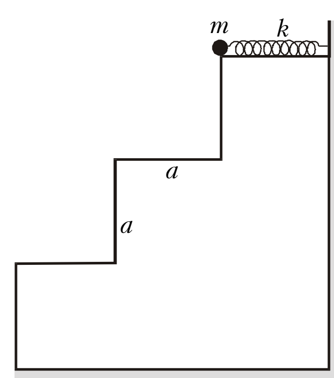

Рис. 5

шарика о ступеньку считать абсолютно упругим, трение и сопротивление воздуха не учитывать. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

2. На шероховатом столе лежит доска массой $M = 1$ кг и длиной $L = 0{,}5$ м так, что за край стола выступает ее часть длиной αL, где $\alpha = 1/4$ (рис.6). Какую минимальную скорость v_0 нужно сообщить маленькому бруску массой $m = 1$ кг, находящемуся на левом конце доски, чтобы в результате его перемещения левый конец доски приподнялся над столом? Коэффициент трения между бруском и доской $\mu = 0{,}1$. Доска при движении бруска не скользит по столу. Толщиной доски пренебречь, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

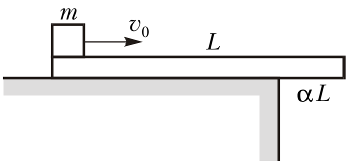

Рис. 6

3. Два маленьких тела начинают одновременно соскальзывать без начальной скорости из точки A: первое по внутренней поверхности гладкой сферы до ее нижней точки B, второе по гладкой наклонной плоскости AB (рис.7). Пренебрегая трением, найдите, во сколько раз α отличаются времена движения этих тел от начальной до конечной точек. Расстояние AB намного меньше радиуса сферы.

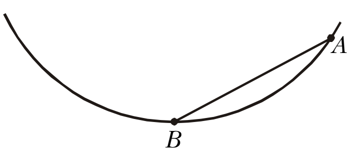

Рис. 7

4. Тело массой $m = 0{,}1$ кг, насаженное на гладкий горизонтальный стержень, связано пружиной жесткостью $k = 10$ Н/м с неподвижной стенкой. Тело смещают от положения равновесия на $x_0 = 10$ см и отпускают без начальной скорости. Найдите среднюю скорость тела $v_{ср}$ за время, в течение которого оно проходит из крайнего положения путь $x_0/2$.

5. В вертикально расположенном цилиндре находится кислород массой $m = 64$ г, отделенный от атмосферы поршнем, который соединен с дном цилиндра пружиной жесткостью $k = 8{,}3 \cdot 10^2$ Н/м. При температуре $T_1 = 300$ К поршень располагается на расстоянии $h = 1$ м от дна цилиндра. До какой температуры T_2 надо нагреть кислород, чтобы поршень расположился на высоте $H = 1{,}5$ м от дна цилиндра? Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К), молярная масса кислорода $\mathrm{M} = 32$ г/моль.

6. Вертикальная цилиндрическая трубка с запаянными концами разделена на две части тонким горизонтальным поршнем, способным перемещаться вдоль нее без трения. Верхняя часть трубки заполнена неоном, а нижняя – гелием, причем массы газов одинаковы. При некоторой температуре поршень находится точно посередине трубки. После того как трубку нагрели, поршень переместился вверх и стал делить объем трубки в отношении 1:3. Определите, во сколько раз α возросла абсолютная температура газов. Молярная масса неона $\mathrm{M}_{Ne} = 20$ г/моль, молярная масса гелия $\mathrm{M}_{He} = 4$ г/моль.

7. Два маленьких тела с равными зарядами q расположены на внутренней поверхности гладкой непроводящей сферы радиусом R. Первое тело закреплено в нижней точке сферы, а второе может свободно скользить по ее поверхности. Найдите массу второго тела, если известно, что в состоянии равновесия оно находится на высоте h от нижней точки сферы.

8. Катушка индуктивностью $L = 0{,}4$ Гн с сопротивлением обмотки $R = 2$ Ом подключена параллельно с резистором сопротивлением $R_1 = 8$ Ом к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 6$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}2$ Ом (рис.8). Какое количество теплоты Q выделится в резисторе после отключения источника?

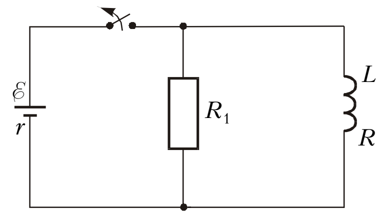

Рис. 8

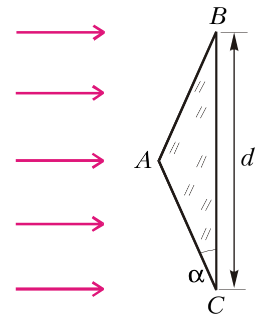

Рис. 9

9. На равнобедренную стеклянную призму падает широкий параллельный пучок света, перпендикулярный грани BC, ширина которой $d = 5$ см (рис.9). На каком расстоянии l от грани BC преломленный призмой свет разделится на два не перекрывающихся пучка? Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$, угол при основании призмы $\alpha = 5{,}7^\circ$. При расчетах учесть, что для малых углов $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha$.

10. Точечный источник света находится на главной оптической оси рассеивающей линзы. Если поместить источник в точку A (рис.10), то его изображение расположится в точке B. Если поместить источник в точку B, то его изображение расположится в точке C. Зная расстояние $l_1 = 20$ см между точками A и B и расстояние $l_2 = 10$ см между точками B и C, найдите фокусное расстояние линзы.

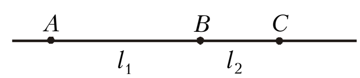

Рис. 10

Химический факультет

1. По спускающемуся эскалатору идет пассажир со скоростью $v = 1$ м/с относительно эскалатора. Скорость эскалатора $u = 1$ м/с, общее количество ступеней $N = 100$. Сколько ступеней пройдет пассажир, спускаясь по эскалатору?

2. На двух кубиках, плавающих в воде, покоится невесомая палочка (рис.11). Размеры ребер кубиков $a_1 = 0{,}1$ м и $a_2 = 0{,}2$ м. Сколько воды нужно налить в один из кубиков, чтобы палочка лежала горизонтально? Массы кубиков $m_1 = 0{,}05$ кг и $m_2 = 0{,}1$ кг. Толщиной стенок пренебречь. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3.

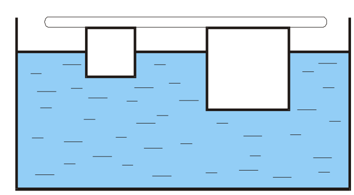
Рис. 11

3. Между двумя точками звуковой волны, колеблющимися в одинаковых фазах, укладывается $N = 825$ длин волн. При повышении температуры на 1 К скорость распространения звука возрастает на 0,2%. Найдите минимальное повышение температуры, при котором эти две точки будут совершать колебания в противофазе.

4. Какую работу нужно совершить над одним молем идеального газа для его изобарического сжатия, если концентрация молекул в конечном состоянии в $k = 2$ раза больше, чем в начальном? Первоначальная температура газа $T = 300$ К. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

5. В горизонтальном цилиндрическом сосуде перемещается без трения поршень, который связан с основанием цилиндра пружиной. Недеформированному состоянию пружины соответствует крайнее левое положение поршня. Слева от поршня находится идеальный газ, занимающий объем $V_1 =$

$= 2$ л при давлении $p_1 = 10^5$ Па. Со стороны пружины – вакуум. Какую работу совершит газ при увеличении объема в 2 раза?

6. Замкнутый цилиндрический сосуд сечением $S = 20$ см^2 разделен поршнем массой $M = 5$ кг на две части. Под поршнем при начальной температуре $t_0 = 0$ °C находится вода, вверху – вакуум. Поршень связан с верхним основанием цилиндра пружиной жесткостью $k = 15$ Н/м. Вначале пружина недеформирована. Определите массу пара под поршнем при нагревании воды до температуры $t = 100$ °C. Молярная масса воды M = 0,018 кг/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К), ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Трением пренебречь.

7. Сосуд представляет собой прямоугольный параллелепипед. Две противоположные боковые грани – металлические пластины, остальные грани – диэлектрики. Расстояние между пластинами $l = 1$ мм, что значительно меньше размеров двух других сторон параллелепипеда. Металлические пластины присоединены к клеммам источника постоянного напряжения $U = 10$ В. В сосуд наливают диэлектрическую жидкость объемом $V = 20$ см^3 с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 21$. Определите, какой заряд пройдет при этом через баллистический гальванометр, включенный в цепь последовательно. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

8. В бассейне с водой глубиной $H = 2$ м, обладающем зеркальным дном, находится точечный источник света на расстоянии $h = H/2$ под поверхностью воды. Определите радиус светового пятна на поверхности бассейна. Показатель преломления воды $n = 4/3$.

9. Определите, какова должна быть связь преломляющего угла стеклянной призмы φ с показателем преломления призмы n (рис.12), если углы падения луча и выхода его из призмы одинаковы и равны α, причем $\operatorname{tg}\alpha = n$.

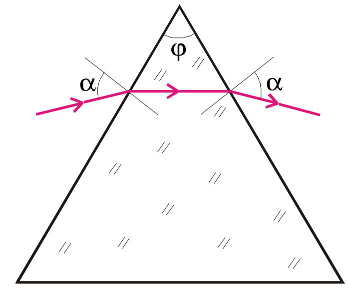

Рис. 12

10. Узкий пучок света с длиной волны $\lambda = 330$ нм падает на металлическую сферу радиусом $R = 0{,}144$ м. Какой максимальный заряд может образоваться на сфере в результате фотоэффекта? Постоянная Планка $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, работа выхода электрона из металла $A = 4 \cdot 10^{-19}$ Дж, постоянная $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ Н · м^2/Кл^2, заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Публикацию подготовили
П.Бородин, В.Власов, В.Воронин, Е.Григорьев, Д.Денисов, Н.Лёвшин, Г.Медведев, А.Невзоров, А.Павликов, В.Панферов, В.Погожев, М.Потапов, А.Разгулин, И.Сергеев, В.Тихомиров, В.Ушаков, М.Федотов, С.Чесноков, Е.Шикин, Б.Щедрин